UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Thiago Formehl

Limitação Uniforme de Minimizantes de Funcionais Não Suaves

Curitiba, 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Thiago Formehl

Limitação Uniforme de Minimizantes de Funcionais Não Suaves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir Ceccon.

Curitiba

Fevereiro de 2016

F725l Formehl, Thiago

Limitação uniforme de minimizantes de funcionais não suaves/ Thiago Formehl. – Curitiba, 2016.

64 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Jurandir Ceccon .

Bibliografia: p. 63-64.

1. Análise funcional. 2. Funções analíticas. 3. Funções elípticas. I. Universidade Federal do Paraná. II.Ceccon, Jurandir. III. Título.

CDD: 515.7

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia vinte e quatro de Fevereiro de dois mil e dezesseis às 16:00 horas, na sala Anfiteatro A, Blocos das PCs, Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR, do Setor de CIÊNCIAS EXATAS da Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **THIAGO FORMEHL** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada: "**Limitação Uniforme de Minimizantes de Funcionais não Suaves**". A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Professores Doutores: JURANDIR CECCON (UFPR), HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR), MARCELO FERNANDES FURTADO (UNB). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora, outorgando-lhe o Grau de **Mestre em MATEMÁTICA**. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, JURANDIR CECCON, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 24 de Fevereiro de 2016.

Prof JURANDIR CECCON (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR)

Prof MARCELO FERNANDES FURTADO (UNB)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós Graduação em MATEMÁTICA
Código CAPES: 40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **THIAGO FORMEHL**, intitulada: "**Limitação Uniforme de Minimizantes de Funcionais não Suaves**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua..APROVAÇÃO......, completando-se assim todos os requisitos previstos nas normas desta Instituição para a obtenção do Grau de **Mestre em MATEMÁTICA**.

Curitiba, 24 de Fevereiro de 2016.

Prof JURANDIR CECCON (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)

Prof HIGIDIO PORTILLO OQUENDO (UFPR)

Prof MARCELO FERNANDES FURTADO (UNB)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha família, em especial aos meus pais, Ari Formehl e Cleusamar Lunardi Formehl, que sempre me apoiaram de todas as formas possíveis. Também, agradeço a minha namorada, Nádia Fernanda Fujikawa, pelo amparo e incentivo para continuar, mesmo nos momentos difíceis e por entender minha ausência durante esses dois anos.

Agradeço aos meus professores de graduação e pós-graduação por partilharem do seu conhecimento (sobre matemática ou não), pela paciência quando errei ou quando tive dúvidas e pelo apoio para seguir em frente. Em particular, agradeço aos meus amigos e orientadores de graduação, que sempre acreditaram em mim, Edilson Roberto Pacheco e Maria José de Paula Castanho.

Aos colegas de pós-gradução, meu muito obrigado pela grande ajuda dentro e fora da sala de aula.

Finalmente, agradeço ao meu orientador, professor Jurandir Ceccon, pela paciência (Deus sabe que ele precisou!) e por estar sempre disponível para tirar dúvidas ou apenas dar uma palavra de incentivo.

" Sabe-se que há um número infinito de mundos, simplesmente porque há um espaço infinito para que os haja. Todavia, nem todos são habitados. Assim, deve haver um número finito de mundos habitados. Qualquer número finito dividido pelo infinito é tão perto de zero que não faz diferença, de forma que a população de todos os planetas do Universo pode ser considerada igual a zero. Daí segue que a população de todo o Universo também é zero, e que quaisquer pessoas que você possa encontrar de vez em quando são meramente produtos de uma imaginação perturbada."

Douglas Adams

Resumo

Neste trabalho, analisamos a regularidade L^∞ de minimizantes para o funcional $\Phi : W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx,$$

restrito ao conjunto $E_F = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) : \int_\Omega F(u)dx = 1\}$, em que Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, F e G são funções contínuas e homogêneas de graus 2^* e 2, respectivamente. Previamente algumas condições são estabelecidas para a existência desses minimizantes. Além disso, supondo F e G funções de classe C^1 e definindo $f(u) = \frac{1}{2^*}\nabla F(u)$ e $g(u) = \frac{1}{2}\nabla G(u)$, alguns resultados sobre a existência de soluções não triviais para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + g(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

são demonstrados.

Palavras-chave: Minimização não suave; regularidade; potenciais elípticos; expoente crítico de Sobolev.

Abstract

In this work, we analyse the L^∞ regularity of minimizers for the functional $\Phi : W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ given by

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u) dx,$$

constrained to the set $E_F = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) : \int_\Omega F(u)dx = 1\}$, where Ω is bounded open subset of $\mathbb{R}^n$, F and G are homogeneous continuous functions of degree 2^* and 2, respectively. Previously some conditions are established for existence of these minimizers. Moreover, assuming F and G are C^1 functions and setting $f(u) = \dfrac{1}{2^*}\nabla F(u)$ and $g(u) = \dfrac{1}{2}\nabla G(u)$, some results about existence of nontrivial solutions to the system

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + g(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

are demonstrated.

Keywords: Non-smooth minimization; regularity; potential elliptic; critical Sobolev exponents.

Sumário

Introdução

Em 1983, no artigo intitulado *"Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents"*, Brezis e Nirenberg [7] investigaram a existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-1} + \lambda u & em \quad \Omega, \\ u > 0 & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

em que $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e Ω é um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$.

O método para determinar soluções de (1) consiste em mostrar a existência de pontos críticos não triviais do funcional

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

definido no espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$. De maneira equivalente, podemos determinar os pontos críticos de

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx \tag{2}$$

restrito ao conjunto $\{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega |u|^{2^*} dx = 1\}$.

Segundo [7], as soluções do problema (2) estão associadas ao primeiro autovalor do operador Laplaciano, dado por

$$\lambda_1 = \inf\left\{\rho > 0 : \int_\Omega |u|^2 dx \leq \rho^{-1}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)\right\}.$$

Isto é, o problema (2) possui solução quando $0 < \lambda < \lambda_1$ e não admite solução quando $\lambda < 0$ e Ω é estrelado ou $\lambda \geq \lambda_1$.

Uma possível generalização para o problema (1) é dada por

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda |u|^{p-2}u & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

em que $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < n$ e $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.

Utilizando as mesmas ideias de [7], Gueda e Véron [10] em 1989 , estudaram os pontos críticos do funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx \tag{4}$$

restrito ao conjunto $\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u|^{p^*}dx = 1\}$. Assim, foi possível mostrar que o problema (3) admite uma solução $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $0 < \alpha < 1$, quando $p^2 \leq n$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, onde

$$\lambda_1 = \inf\left\{\rho > 0 : \int_\Omega |u|^p dx \leq \rho^{-1}\int_\Omega |\nabla u|^p dx, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

Além disso, o problema (3) não admite solução quando $\lambda \leq 0$ e Ω é estrelado ou $\lambda \geq \lambda_1$.

Esse tipo de problema tem sido explorado recentemente no caso vetorial dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + g(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

em que $u = (u^1, \cdots, u^k)$, $\Delta u = (\Delta u^1, \cdots, \Delta u^k)$, $f(u) = \dfrac{1}{p^*}\nabla F(u)$ e $g(u) = \dfrac{1}{p}\nabla G(u)$, onde $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 homogêneas de graus p^* e p, respectivamente. O caso particular em que $G(t) =< At, t >$, sendo A uma matriz simétrica kxk, tem sido discutido na literatura, como por exemplo em [1], [3] e, mais recentemente, em [12]. Note que quando tomamos $k = 1$ e $p = 2$ em (5) retornamos ao problema (1).

Procedendo como no caso escalar, veremos que as soluções desse problema para o caso $p = 2$ estão associadas ao problema de minimização do funcional

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx$$

restrito ao conjunto $E_F = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) : \int_\Omega F(u)dx = 1\}$, em que $|\nabla u|^2 := \sum_{i=1}^k |\nabla u^i|^2$.

No capítulo dois deste trabalho estaremos interessados em obter condições necessárias e/ou suficientes para que o conjunto $X_F = \{u \in E_F : \Phi(u) = c_F\}$, em que $c_F = \inf_{u \in E_F} \Phi(u)$, seja não vazio, supondo apenas que as funções F e G sejam contínuas. Nossa principal referência é o trabalho de Barbosa e Montenegro [2]. Observamos que:

i) para $n \geq 4$, se $G(t_0) > 0$ para algum ponto de máximo de F sobre a esfera $\mathbb{S}^{k-1}$, então X_F é não vazio;

ii) para $n = 3$, se $G(t_0) > \lambda_1 - \left(k(n,2)^2 \int_\Omega \varphi_1^2 dx\right)^{-1}$, em que $k(n,2)$ é a constante ótima de Sobolev e $\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma autofunção associada ao autovalor λ_1, então X_F é não vazio.

Posteriormente, mostraremos que alguns resultados de [7] podem ser estendidos para o caso veorial. Mais especificamente, provaremos que as desigualdades $0 < M_G = max_{|t|=1}G(t) < \lambda_1$ são condições suficientes para a existência de soluções não triviais de (5) no caso $p = 2$. Esta conclusão segue quase imediatamente do método dos multiplicadores de Lagrange aplicado ao problema de minimização anterior. Além disso, afirmamos que a positividade de G é uma condição necessária para a existência de soluções em um domínino estrelado. Para isso, como no caso escalar, faremos uso da Identidade de Pohozaev. E, por último, forneceremos um exemplo em que o sistema (5) não admite solução positiva quando $M_G \geq \lambda_1$.

No capítulo 3 iremos investigar estimativas a priori para o conjunto X_F. Mais precisamente, iremos mostrar que X_F tem regularidade L^∞. Observamos que para o caso $k = 1$, Brezis e Nirenberg provam que X_F é não vazio se, e somente se, $c_F < k(n, 2)^{-2}$ em (2). De forma semelhante, encontraremos inicialmente uma estimativa superior para c_F, dada por $c_F \leq M_F^{-2/2^*} k(n, 2)^{-2}$, onde $M_F = max_{|t|=1}F(t)$. Então, dividiremos a análise da regularidade em dois caso: $c_F < M_F^{-2/2^*} k(n, 2)^{-2}$ e $c_F = M_F^{-2/2^*} k(n, 2)^{-2}$.

Para o caso em que $c_F < M_F^{-2/2^*} k(n, 2)^{-2}$ estabeleceremos uma limitação uniforme em X_F. Para isso, será introduzido o conceito de solução "ultra fraca"para o problema

$$-\Delta u \cdot u = c_F F(u) + G(u) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

já que F e G não são diferenciáveis.

No segundo caso, mostraremos que se $(u_m) \subset X_F$ é tal que $u_m \rightharpoonup u_0$ fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, segue que:

i) se $u_0 \neq 0$, então $\|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq C$ e $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$;

ii) se $u_0 = 0$, então $\|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \to \infty$.

Para estabelecer estas convergências faremos uso do Teorema da Concentração da Compacidade e do Lema de Brezis-Lieb, ambos demonstrados no capítulo 1. A principal referência utilizada aqui é Ceccon e Montenegro [8].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Espaços de Sobolev e Soluções Fracas

Nesta seção definiremos Espaços de Sobolev e apresentaremos algumas propriedades relevantes para o desenvolvimento do trabalho. Algumas demonstrações serão omitidas para facilitar a leitura ou por serem resultados bem conhecidos da teoria. Além disso, introduziremos o conceito de solução fraca e demonstraremos características importantes a respeito das mesmas.

Teorema 1.1 *Sejam $(u_m) \subset L^p(\Omega)$ uma sequência e $u \in L^p(\Omega)$ uma função tais que $\|u_m - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existe uma subsequência (u_{m_k}) tal que:*

i) $u_{m_k}(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

ii) $|u_{m_k}(x)| \leq h(x)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e q.t.p. em* Ω*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Demonstração. Consulte [4], Teorema IV.9, página 58. $\square$

Lema 1.2 *Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para algum $p < \infty$, então $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(\Omega)}$.*

Demonstração. Pela desigualdade de interpolação, temos que $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{p/q}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-p/q}_{L^\infty(\Omega)}$. Desde que $\lim_{r\to 0} a^r = 1$ e $\lim_{r\to 0} a^{1-r} = a$ para qualquer $a > 0$, segue que $\limsup_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Por outro lado, considere o conjunto $\Omega_\epsilon = \{x : |u(x)| > \|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon\}$ para algum $\epsilon > 0$. É claro que $|\Omega_\epsilon| > 0$, logo $\|u\|_{L^q(\Omega)} \geq (\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon)|\Omega_\epsilon|^{1/q}$. Fazendo $q \to \infty$ encontramos $\liminf_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(\Omega)} \geq (\|u\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon)$. Como ϵ é arbitrário, segue o resultado. $\square$

Definição 1.3 *(Notação de multi-índice)*

i) Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, *com* $\alpha_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}$ *é chamado multi-índice de ordem* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

ii) Considere uma função $\varphi \in C^k(\Omega)$ *e um multi-índice* α, *com* $|\alpha| \leq k$, *e* $k \in \mathbb{N}$. *Definimos*

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x).$$

Definição 1.4 *(Derivada fraca) Sejam* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Dizemos que* v *é a* α*-ésima derivada parcial fraca de* u, *e denotamos por* $D^\alpha u = v$, *se*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definição 1.5 *(Espaços de Sobolev) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \leq p \leq \infty$ *e* k *um inteiro não negativo. O espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

é o conjunto formado por todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ *tais que existem as derivadas fracas* $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, *para qualquer multi-índice* α *com* $|\alpha| \leq k$.

Definição 1.6 *Seja* $u \in W^{k,p}(\Omega)$, *definimos a norma de* u *como*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} & se \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty & se \quad p = \infty \end{cases}$$

Teorema 1.7 *O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, *com a norma acima é um espaço de Banach.*

Demonstração. Consulte [4], Proposição IX.1, página 150. □

Teorema 1.8 *O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$*,* $1 < p < \infty$*, com a norma acima é reflexivo.*

Demonstração. Consulte [4], Proposição IX.1, página 150. □

Definição 1.9 *Denotaremos por* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *o fecho do conjunto* $C_c^\infty(\Omega)$ *no espaço* $W^{k,p}(\Omega)$ *com respeito à norma* $\|.\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Teorema 1.10 *(Aproximação global por funções suaves até a fronteira) Assuma que* Ω *é limitado com* $\partial\Omega \in C^1$ *e suponha que* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *com* $1 \leq p < \infty$*. Então existem funções* $(u_m) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *tais que*

$$u_m \to u \quad \textit{em} \quad W^{k,p}(\Omega).$$

Demonstração. Consulte [9], Teorema 3, página 252. □

Proposição 1.11 *Sejam* $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então* $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \textit{para} \quad i = 1, \cdots, n.$$

Demonstração. Consulte [4], Proposição IX.4, página 155. □

Teorema 1.12 *(Regra da Cadeia) Sejam* $f \in C^1(\mathbb{R})$*,* $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *e* $u \in W^{1,2}(\Omega)$*. Então a função composta* $f \circ u \in W^{1,2}(\Omega)$ *e*

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

Demonstração. Consulte [4], Proposição IX.5, página 155. □

Definição 1.13 *Seja* $1 \leq p < n$*. O expoente crítico de Sobolev é o número*

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Teorema 1.14 *Assuma* $1 \leq p < n$*. Existe uma constante* C*, dependendo somente de* p *e* n*, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.1}$$

para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Consulte [9], Teorema 1, página 263. □

Definição 1.15 *Denotaremos por* $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *o fecho do conjunto* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com respeito à norma* $\|\nabla \cdot \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Definição 1.16 *Seja $k(n, p)$ a menor constante satisfazendo desigualdade* (1.1)*. Tal constante é chamada de Constante Ótima de Sobolev e a desigualdade* (1.1)*, com $C = k(n, p)$, é denominada Desigualdade Ótima de Sobolev.*

Segundo [16], a igualdade na definição anterior ocorre se considerarmos funções da forma

$$u_0(x) = \alpha\omega(\beta(x - x_0)),$$

para α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sendo

$$\omega(x) = \left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-n}{p}}.$$

As funções u_0 são chamadas de *Funções extremais* para a desigualdade ótima de Sobolev.

Teorema 1.17 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, com fronteira de classe C^1, $1 \leq p < n$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in L^{p^*}(\Omega)$ e além disso*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Consulte [9], Teorema 2, página 265. □

Teorema 1.18 *(Desigualdade de Poincaré) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um aberto limitado, $1 \leq p < n$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma constante $C = C(n, p, q, \Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo $1 \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Consulte [9], Teorema 3, página 265. □

Observe que, pelo teorema acima, a expressão $\|\nabla \cdot\|_{L^p(\Omega)}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ quando Ω é um aberto limitado.

Definição 1.19 *Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso compactamente em Y e denotamos por $X \subset\subset Y$, se*

i) existe uma constante C tal que

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X;$$

ii) se (x_m) é uma sequência limitada em X, então existe uma subsequência (x_{m_j}) convergente em Y.

Teorema 1.20 *(Rellich-Kondrachov) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, com fronteira de classe C^1 e $1 \leq p < n$. Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \quad \textit{com} \quad q \in [1, p^*).$$

Demonstração. Consulte [9], Teorema 1, página 272. □

Agora, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Definição 1.21 *Dizemos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca do problema* (1.2) *se*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega f(x,u)\phi dx, \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{1.3}$$

Pelo Teorema 1.17 toda solução fraca de (1.2) está em $L^{2^*}(\Omega)$. Porém, os próximos teoremas apresentam condições para que esse espaço possa ser "melhorado" em algum subconjunto de Ω.

Teorema 1.22 *Seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u \geq 0$, uma solução fraca de* (1.2) *e f uma função tal que $|f(x,u)| \leq C(1 + |u|^{2^*-1})$. Então $u \in L^{\beta 2^*}(\Omega)$, com $1 < \beta < \frac{2^*}{2}$.*

Demonstração. Para cada $l > 0$ defina

$$F_l(u) = \begin{cases} u^\beta, & se \quad u \leq l; \\ \beta l^{\beta-1}(u-l) + l^\beta, & se \quad u > l; \end{cases}$$

e

$$G_l(u) = \begin{cases} u^{(2\beta-1)}, & se \quad u \leq l; \\ (2\beta-1)l^{(\beta-1)2}(u-l) + l^{(2\beta-1)}, & se \quad u > l. \end{cases}$$

Logo,

$$F_l'(u) = \begin{cases} \beta u^{\beta-1}, & se \quad u \leq l; \\ \beta l^{\beta-1}, & se \quad u > l; \end{cases}$$

e

$$G_l'(u) = \begin{cases} (2\beta-1)u^{(\beta-1)2}, & se \quad u \leq l; \\ (2\beta-1)l^{(\beta-1)2}, & se \quad u > l. \end{cases}$$

Assim, obtemos as seguintes propriedades:

i) $G_l(u) \leq uG_l'(u)$;

Para $u \leq l$ observe que $2\beta - 2 > 0$. Logo $(2\beta-2)u^{(2\beta-1)} \geq 0$, isto é,

$$u^{(2\beta-1)} \leq u(2\beta-1)u^{2(\beta-1)}.$$

Se $u > l$, como $-2\beta + 2 < 0$ segue que $(-2\beta+2)l^{2\beta-1} \leq 0$. Assim,

$$(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}u - (2\beta-1)l^{2\beta-1} + l^{2\beta-1} \leq (2\beta-1)l^{2(\beta-1)}u,$$

ou seja,

$$(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(u-l) + l^{2\beta-1} \leq (2\beta-1)l^{2(\beta-1)}u.$$

ii) $c[F_l'(u)]^2 \leq G_l'(u)$, para alguma constante c independende de l;

Para ambos os casos basta tomar $0 < c < 1/2$, então $c\beta^2 - 2\beta + 1 \leq 0$ quando $1 < \beta < 2^*/2$.

iii) $uG_l(u) \leq [F_l(u)]^2$;

É claro que o caso $u \leq l$ é satisfeito. Vamos mostrar que o mesmo acontece para $u > l$. Basta ver que, a desigualdade acima é equivalente a

$$(\beta^2 - 2\beta + 1)l^{2(\beta-1)}u^2 - 2(\beta^2 - 2\beta + 1)l^{2\beta-1}u + (\beta^2 - 2\beta + 1)l^{2\beta} \geq 0,$$

a qual é verdadeira sempre que $\beta^2 - 2\beta + 1 \geq 0$, que por sua vez é válida para todo β.

iv) $F_l(u), G_l(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$;

Basta observar que F_l e G_l são funções $C^1(\mathbb{R})$ com derivadas limitadas, portanto, pela regra da cadeia, $F_l(u), G_l(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Agora, considere a função teste $\eta^2 G_l(u)$, em que $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo, por (1.3) temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\eta^2 G_l(u))dx = \int_\Omega f\eta^2 G_l(u)dx.$$

Como $\nabla(\eta^2 G_l(u)) = 2\eta\nabla\eta G_l(u) + \eta^2 G_l'(u)\nabla u$, aplicando a propriedade (i), a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young com ϵ, encontramos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \eta^2 \nabla u G_l'(u)\nabla u dx - \int_\Omega f\eta^2 G_l(u)dx &\leq -2\int_\Omega \nabla u \nabla\eta G_l(u)\eta dx \\ &\leq 2\int_\Omega |\nabla u\nabla\eta|\eta G_l(u)^{\frac{1}{2}} G_l(u)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq 2\int_\Omega |\nabla u\nabla\eta|\eta G_l'(u)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} G_l(u)^{\frac{1}{2}} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 G_l'(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla \eta|^2 uG_l(u)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \epsilon C_1 \int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 G_l'(u)dx + C_2\int_\Omega |\nabla \eta|^2 uG_l(u)dx. \end{aligned}$$

Além disso, a hipótese fornece que $G_l(u)f \leq C_3(1+u^{2^*-1}G_l(u))$. Assim, escolhendo ϵ suficientemente pequeno e usando a propriedade (iii), temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 G_l'(u)dx &\leq C_2\int_\Omega |\nabla \eta|^2 F_l(u)^2dx + C_3\int_\Omega (1+u^{2^*-1}G_l(u))\eta^2dx \\ &\leq C\int_\Omega |\nabla \eta|^2 F_l(u)^2dx + C\int_\Omega |u|^{2^*-2}[F_l(u)]^2\eta^2dx + C \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a propriedade (ii), encontramos a estimativa

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 G_l'(u)dx \geq C\int_\Omega |\eta F_l'(u)\nabla u|^2dx,$$

então,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(\eta F_l(u))|^2dx &\leq C\int_\Omega |\eta F_l'(u)\nabla u|^2dx + C\int_\Omega |\nabla \eta|^2[F_l(u)]^2dx \\ &\leq C\int_\Omega |\nabla \eta|^2 F_l(u)^2dx + C\int_\Omega |u|^{2^*-2}[F_l(u)]^2\eta^2dx + C. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Sobolev, encontramos

$$\left(\int_\Omega [F_l(u)\eta]^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\int_\Omega |\nabla \eta|^2 F_l(u)^2dx + C\int_\Omega |u|^{2^*-2}[F_l(u)]^2\eta^2dx + C \tag{1.4}$$

Agora, dado $x_0 \in \Omega$, escolha $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $supp(\eta) = B(x_0,R)$, então

$$\|u\|_{L^{2^*}B(x_0,R)} \leq \frac{1}{C}.$$

Então, pela desiguladade de Hölder, segue que

$$C\int_\Omega |u|^{2^*-2}[F_l(u)]^2\eta^2dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega [F_l(u)\eta]^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \tag{1.5}$$

Finalmente, substituindo (1.5) em (1.4), segue que

$$\left(\int_\Omega [F_l(u)\eta]^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\int_\Omega |\nabla \eta|^2 F_l(u)^2dx + C.$$

Tomando o limite em l, pelo Teorema da Convergência Monótona, concluímos que

$$\left(\int_\Omega \eta^{2^*}u^{\beta 2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\int_\Omega u^{\beta 2}dx + C$$

e, como $\beta < \frac{2^*}{2}$, temos que $u \in L^{\beta 2^*}_{loc}(\Omega)$.

Para os pontos $x_0 \in \partial\Omega$ a argumentação anterior ainda se aplica, basta considerar funções da forma $\eta = \overline{\eta}|_\Omega$, em que $supp(\overline{\eta}) = B(x_0, R)$, e observar que $\eta^2 G_l(u)$ e $\eta F_l(u)$ ainda estão em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Portanto $u \in L^{\beta 2^*}(\Omega)$. □

Observe que na demonstração acima não precisamos da igualdade em (1.3); a condição

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx \leq \int_\Omega f \phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \phi \geq 0,$$

é suficiente.

Lema 1.23 *Sejam $a_i, i = 1, ..., N$, números reais não negativos e α um expoente positivo. Então*

$$\lambda \sum_{i=1}^N a_i^\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^\alpha \leq \Lambda a_i^\alpha$$

onde $\lambda = min(1, N^{\alpha-1})$ e $\Lambda = max(1, N^{\alpha-1})$.

Demonstração. Consulte [15], Lema 1. □

Lema 1.24 *Seja α um expoente positivo e a_i, $b_i, i = 1, ..., N$, números reais tais que $0 < a_i < \infty$ e $0 \leq \beta_i < \alpha$. Suponha que z é um número positivo satisfazendo*

$$z^\alpha \leq \sum_{i=1}^N a_i z^{\beta_i}.$$

Então

$$z \leq C \sum_{i=1}^N (a_i)^{\gamma_i},$$

onde C depende somente de N, α e β_i, com $\gamma_i = (\alpha - \beta_i)^{-1}$.

Demonstração. Para demonstrar este lema faremos uso da desigualdade de Young

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} a^q,$$

em que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $a, b \geq 0$ e $p, q \geq 1$. Então, se $0 < \beta < \alpha$ e $\alpha > 0$ temos

$$az^\beta = \left(\frac{a}{\epsilon} \right) (\epsilon z^\beta) \leq \frac{\beta}{\alpha} (\epsilon z^\beta)^{(\frac{\alpha}{\beta})} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \left(\frac{a}{\epsilon} \right)^{\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)}}.$$

Tome $\epsilon = (\alpha / 2N\beta)^{\beta/\alpha}$, portanto

$$az^\beta \leq (1/2N) z^\alpha + (2Na)^{\alpha/(\alpha-\beta)}. \tag{1.6}$$

Note que a desigualdade acima é trivial para $\beta = 0$. Agora, aplicando (1.6) em cada termo da soma $\sum_{i=1}^{N} a_i z^{\beta_i}$, obtemos

$$z^\alpha \leq \sum_{i=1}^{N} [(1/2N)z^\alpha + (2Na_i)^{\alpha/(\alpha-\beta_i)}],$$

logo

$$z^\alpha \leq 2\sum_{i=1}^{N} (2Na_i)^{\alpha\gamma_i}.$$

A conclusão segue imediatamente do Lema 1.23. □

Teorema 1.25 *Seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega A(x,u,\nabla u)\nabla\phi + B(x,u,\nabla u)\phi dx = 0, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega), \tag{1.7}$$

onde $A = A(x,u,p)$ e $B = B(x,u,p)$ estão definidas para todos os valores de u, p e todos os pontos $x \in \Omega$. Além disso, elas satisfazem desigualdades da forma

$$|A| \leq a|p|^{\alpha-1} + b|u|^{\alpha-1} + e,$$

$$|B| \leq c|p|^{\alpha-1} + d|u|^{\alpha-1} + f,$$

$$pA \geq |p|^\alpha - d|u|^\alpha - g,$$

onde $1 < \alpha < n$ é um expoente fixo, a é uma constante positiva, e b, c, d, e, f e g são funções mensuráveis positivas com

$$b, e \in L^{\frac{n}{(\alpha-1)}}(\Omega); \quad c \in L^{\frac{n}{(1-\epsilon)}}(\Omega); \quad d, f, g \in L^{\frac{n}{(\alpha-\epsilon)}}(\Omega) \quad \textit{com} \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Então, para $x \in \Omega$ e $B(x,2R) \subset \Omega$, temos que

$$\|u\|_{L^\infty(B(x,R))} \leq CR^{\frac{-n}{\alpha}}(\|u\|_{L^\alpha(B(x,2R))} + kR^{\frac{n}{\alpha}})$$

e

$$\|\nabla u\|_{L^\alpha(B(x,R))} \leq CR^{-1}(\|u\|_{L^\alpha(B(x,2R))} + kR^{\frac{n}{\alpha}}),$$

em que C e k são constantes que não dependem de u e ∇u.

Demonstração. Seja $x \in \Omega$ e suponha primeiro que $R = 1$. Considere a função

$$\bar{u} = |u| + k, x \in B(x,2),$$

onde $k = (\|e\|_{L^{n/(\alpha-1)}(B(x,2))} + \|f\|_{L^{n/(\alpha-\epsilon)}(B(x,2))})^{1/(\alpha-1)} + \|g\|^{1/\alpha}_{L^{n/(\alpha-\epsilon)}(B(x,2))}$. Então

$$\begin{aligned} |A| &\leq a|p|^{\alpha-1} + \bar{b}|\bar{u}|^{\alpha-1}, \\ |B| &\leq c|p|^{\alpha-1} + \bar{d}|\bar{u}|^{\alpha-1}, \\ pA &\geq |p|^{\alpha} - \bar{d}|\bar{u}|^{\alpha}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

com $\bar{b} = b + k^{1-\alpha}e, \bar{d} = d + k^{1-\alpha}f + k^{-\alpha}g$. Além disso, as normas de $\bar{b}$ e $\bar{d}$ são limitadas,

$$\|\bar{b}\|_{L^{n/(\alpha-1)}(B(x,2))} \leq \|b\|_{L^{n/(\alpha-1)}(B(x,2))} + 1, \|\bar{d}\|_{L^{n/(\alpha-\epsilon)}(B(x,2))} \leq \|d\|_{L^{n/(\alpha-\epsilon)}(B(x,2))} + 2.$$

O restante da prova depende de uma escolha apropriada da função teste na relação (1.7). Para $q \geq 1$ e $l > k$ fixos, defina as funções

$$F_l(\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}^q, & se \quad k \leq \bar{u} \leq l, \\ ql^{q-1}\bar{u} - (q-1)l^q, & se \quad l \leq \bar{u}, \end{cases}$$

e

$$G_l(u) = sign(u)\{F_l(\bar{u})F_l'(\bar{u})^{\alpha-1} - q^{\alpha-1}k^{\beta}\}, \quad -\infty < u < \infty,$$

onde q e β estão relacionados por $\alpha q = \alpha + \beta - 1$. Evidentemente F_l é continuamente diferenciável como função de $\bar{u}$ e G_l é suave por partes como função de u. Agora, considere $\eta \in C_c^{\infty}(B(x,2))$, não negativa, e tome como função teste em (1.7)

$$\phi = \eta^{\alpha}G_l(u).$$

No conjunto onde $|u| \neq l - k$ temos que

$$\nabla\phi = \alpha\eta^{\alpha-1}\nabla\eta G_l + \eta^{\alpha}G_l'\nabla u,$$

com

$$G_l' = \begin{cases} q^{-1}\beta(F_l')^{\alpha}, & se \quad |u| < l-k, \\ (F_l')^{\alpha}, & se \quad |u| > l-k, \end{cases}$$

Portanto, usando (1.8) e o fato de que $|G_l| \leq F_l(F_l')^{\alpha-1}$ e $|\nabla u| = |\nabla\bar{u}|$ temos

$$\begin{aligned} \nabla\phi A + B\phi \;\; &\geq \;\; \eta^{\alpha}G_l'\{|\nabla u|^{\alpha} - \bar{d}|\bar{u}|^{\alpha}\} - \alpha\eta^{\alpha-1}|\nabla\eta G_l|\{a|\nabla u|^{\alpha-1} + \bar{b}|\bar{u}|^{\alpha-1}\} \\ &\quad -\eta^{\alpha}|G_l|\{c|\nabla u|^{\alpha-1} + \bar{d}|\bar{u}|^{\alpha-1}\} \\ &\geq \;\; |\eta F_l'\nabla\bar{u}|^{\alpha} - \alpha a|\nabla\eta F_l||\eta F_l'\nabla\bar{u}|^{\alpha-1} - \alpha\bar{b}|\nabla\eta F_l||\eta F_l'\bar{u}|^{\alpha-1} \\ &\quad -c\eta F_l|\eta F_l'\nabla\bar{u}|^{\alpha-1} - d\{q^{-1}\beta|\eta F_l'\bar{u}|^{\alpha} + \eta F_l|\eta F_l'\bar{u}|^{\alpha-1}\}, \end{aligned}$$

válida sempre que $|u| \neq l - k$. A última desigualdade pode ser simplificada fazendo $v_l = v_l(x) = F_l(\bar{u})$. Desde que $\bar{u}F_l' \leq qF_l$ segue que

$$\nabla\phi A + B\phi \;\; \geq \;\; |\eta\nabla v_l|^{\alpha} - \alpha a|\nabla\eta v_l||\eta\nabla v_l|^{\alpha-1} - \alpha q^{\alpha-1}\bar{b}|\nabla\eta v_l|(\eta v_l)^{\alpha-1}$$

$$-c\eta v_l|\eta\nabla v_l|^{\alpha-1} - (1+\beta)q^{\alpha-1}\bar{d}(\eta v_l)^{\alpha}. \tag{1.9}$$

No conjunto onde $|u| = l - k$ temos $\nabla\phi = \alpha\eta^{\alpha-1}\nabla\eta G_l$ e $\nabla u = \nabla\bar{u} = 0$ q.t.p., então (1.9) vale também nesse caso. Assim, integrando (1.9) em $B(x,2)$, encontramos

$$\begin{aligned}\|\eta\nabla v_l\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(B(x,2))} \ &\leq \ \alpha a\int_{B(x,2)}|\nabla\eta v_l||\eta\nabla v_l|^{\alpha-1}dx + \alpha q^{\alpha-1}\int_{B(x,2)}\bar{b}|\nabla\eta v_l|(\eta v_l)^{\alpha-1}dx \\ &+\int_{B(x,2)}c\eta v_l|\eta\nabla v_l|^{\alpha-1}dx + (1+\beta)q^{\alpha-1}\int_{B(x,2)}\bar{d}(\eta v_l)^{\alpha}dx. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Os termos do lado direito da desigualdade acima podem ser estimados usando a desigualdade de Hölder juntamente com (1.1). Assim

$$\begin{aligned}\int_{B(x,2)}|\nabla\eta v_l||\eta\nabla v_l|^{\alpha-1}dx \ &\leq \ \|\nabla\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}\|\eta\nabla v_l\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha}(B(x,2))}, \\ \int_{B(x,2)}\bar{b}|\nabla\eta v_l|(\eta v_l)^{\alpha-1}dx \ &\leq \ \|\bar{b}\|_{L^{n/(\alpha-1)}(B(x,2))}\|\nabla\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}\|\eta v_l\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha^*}(B(x,2))} \\ &\leq \ C\|\nabla\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}\|\nabla(\eta v_l)\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha}(B(x,2))} \\ &\leq \ C\{\|\nabla\eta v_l\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(B(x,2))} + \|\nabla\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}\|\eta\nabla v_l\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\}.\end{aligned}$$

Aqui C denota uma constante (que geralmente muda de acordo com as estimativas) que não depende de u ou de suas derivadas. Similarmente

$$\begin{aligned}\int_{B(x,2)}c\eta v_l|\eta\nabla v_l|^{\alpha-1}dx \ &= \ \int_{B(x,2)}c(\eta v_l)^{\epsilon}(\eta v_l)^{1-\epsilon}|\eta\nabla v_l|^{\alpha-1}dx \\ &\leq \ \|c\|_{L^{n/(1-\epsilon)}(B(x,2))}\|\eta v_l\|^{\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\|\eta v_l\|^{1-\epsilon}_{L^{\alpha^*}(B(x,2))}\|\eta\nabla v_l\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha}(B(x,2))} \\ &\leq \ C\|\eta v_l\|^{\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\{\|\nabla\eta v_l\|^{1-\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\|\eta\nabla v_l\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha}(B(x,2))} + \|\eta\nabla v_l\|^{\alpha-\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\} \\ \int_{B(x,2)}\bar{d}(\eta v_l)^{\alpha}dx \ &= \ \int_{B(x,2)}\bar{d}(\eta v_l)^{\epsilon}(\eta v_l)^{\alpha-\epsilon}dx \\ &\leq \ \|\bar{d}\|_{L^{n/(\alpha-\epsilon)}(B(x,2))}\|\eta v_l\|^{\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\|\eta v_l\|^{\alpha-\epsilon}_{L^{\alpha^*}(B(x,2))} \\ &\leq \ C\|\eta v_l\|^{\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\{\|\nabla\eta v_l\|^{\alpha-\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))} + \|\eta\nabla v_l\|^{\alpha-\epsilon}_{L^{\alpha}(B(x,2))}\}.\end{aligned}$$

Escrevendo $z = \|\eta\nabla v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}/\|\nabla\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}$, $\varsigma = \|\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}/\|\nabla\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}$, e substituindo em (1.10) juntamente com as quatro estimativas acima, encontramos

$$z^{\alpha} \leq C[z^{\alpha-1} + q^{\alpha-1}(1+z^{\alpha-1}) + \varsigma^{\epsilon}(z^{\alpha-1}+z^{\alpha-\epsilon}) + (1+\beta)q^{\alpha-1}\varsigma^{\epsilon}(1+z^{\alpha-\epsilon})].$$

Aplicando o Lema 1.24 e simplificando o resultado, obtemos (desde que $1+\beta \leq (\alpha+1)q$)

$$z \leq Cq^{\alpha/\epsilon}(1+\varsigma),$$

ou, em termos das funções originais

$$\|\eta\nabla v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))} \leq Cq^{\alpha/\epsilon}(\|\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))} + \|\nabla\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}). \tag{1.11}$$

Novamente pela desigualdade de Sobolev, segue finalmente que

$$\|\eta v_l\|_{L^{\alpha^*}(B(x,2))} \leq Cq^{\alpha/\epsilon}(\|\eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))} + \|\nabla \eta v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}). \tag{1.12}$$

Agora, sejam h e h' números reais satisfazendo $h' < h \leq 2$. Escolha η tal que $\eta = 1$ em $B(x, h')$, $0 \leq \eta \leq 1$ em $B(x, h)$, nula fora de $B(x, h)$ e, além disso, $\text{máx}|\nabla \eta| = 2(h - h')^{-1}$. Substituindo essa função em (1.11) e (1.12) segue imediatamente que

$$\|\nabla v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,h'))} \leq Cq^{\alpha/\epsilon}(h - h')^{-1}\|v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,h))} \quad \text{e} \tag{1.13}$$

$$\|v_l\|_{L^{\alpha^*}(B(x,h'))} \leq Cq^{\alpha/\epsilon}(h - h')^{-1}\|v_l\|_{L^{\alpha}(B(x,h))}. \tag{1.14}$$

Façamos $l \to \infty$ na equação (1.14). Desde que $v_l \to \bar{u}^q$, pelo Teorema da Convergência Monótona obtemos

$$\|\bar{u}\|_{L^{\alpha^*}(B(x,h'))} \leq Cq^{\alpha/\epsilon}(h - h')^{-1}\|\bar{u}^q\|_{L^{\alpha}(B(x,h))}. \tag{1.15}$$

Note que isto é válido devido a finitude da norma presente no lado direito. Finalmente, (1.15) pode ser simplificado tomando

$$p = \alpha q = \alpha + \beta - 1, \kappa = \alpha^*/\alpha = n/(n - a),$$

dessa forma

$$\|\bar{u}\|_{L^{\kappa p}(B(x,h'))} \leq [C(p/\alpha)^{\alpha/\epsilon}(h - h')^{-1}]^{\alpha/p}\|\bar{u}\|_{L^{p}(B(x,h))}. \tag{1.16}$$

A conclusão desejada segue por iteração dessa desigualdade. Defina, para $\nu = 0, 1, 2, ...,$

$$p_\nu = \kappa^\nu \alpha,$$

e $h_\nu = 1 + 2^{-\nu}, h'_\nu = h_{\nu+1}$, portanto (1.16) torna-se

$$\|\bar{u}\|_{L^{p_{\nu+1}}(B(x,h_{\nu+1}))} \leq C^{1/\kappa^\nu}K^{\nu/\kappa^\nu}\|\bar{u}\|_{L^{p_\nu}(B(x,h_\nu))},$$

onde $K = 2\kappa^{\alpha/\epsilon}$. Por iteração segue

$$\|\bar{u}\|_{L^{p_{\nu+1}}(B(x,h_{\nu+1}))} \leq C^{\sum 1/\kappa^\nu}K^{\sum \nu/\kappa^\nu}\|\bar{u}\|_{L^{\alpha}(B(x,2))} \leq C\|\bar{u}\|_{L^{\alpha}(B(x,2))},$$

desde que ambas as séries convergem. A desigualdade acima nos diz que $\overline{u} \in L^q(B(x, 1))$ para todo $1 < q \leq \infty$. De fato, se $\overline{u}$ não fosse limitada, o conjunto $\Omega_\epsilon = \{x : \overline{u}(x) > C\|\bar{u}\|_{L^{\alpha}(B(x,2))} + \epsilon\}$ teria medida positiva, daí $lim_{q\to\infty}\|\bar{u}\|_{L^q(B(x,1))} \geq (C\|\bar{u}\|_{L^{\alpha}(B(x,2))} + \epsilon)$ contradizendo a desigualdade acima. Então, fazendo $\nu \to \infty$, e observando que $\|\bar{u}\|_{L^{\infty}(B(x,1))} \leq \lim \|\bar{u}\|_{L^{p_\nu}(B(x,h_\nu))}$, do Lema 1.2 resulta

$$\|\bar{u}\|_{L^{\infty}(B(x,1))} \leq C\|\bar{u}\|_{L^{\alpha}(B(x,2))}.$$

Como $\bar{u} = |u| + k$, concluímos que

$$\|u\|_{L^\infty(B(x,1))} \leq C\{\|u\|_{L^\alpha(B(x,2))} + k\}$$

Isto prova a primeira parte do teorema no caso $R = 1$. A segunda parte segue imediatamente tomando $q = 1, h' = 1, h = 2$ em (1.13). O caso geral $R \neq 1$ pode ser obtido do caso particular $R = 1$ por uma simples mudança de variável. □

Observe que se $u \geq 0$ no teorema acima, então a condição

$$\int_\Omega A(x, u, \nabla u)\nabla\phi + B(x, u, \nabla u)\phi dx \leq 0, \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \phi \geq 0,$$

é suficiente.

1.2 Teorema da Concentração de Compacidade

O principal objeto desta seção é fornecer uma demonstração para o Teorema da Concentração de Compacidade, que nos será útil no capítulo três. Para isso, precisamos generalizar alguns conceitos da seção anterior (dentre eles a desigualdade de Sobolev), e introduzir o conceito de convergência fraca em medida, o qual também será necessário adiante.

Definição 1.26 *Dizemos que uma função $H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é homogênea de grau q quando $H(\rho t) = \rho^q H(t)$ para todo $\rho > 0$ e $t \in \mathbb{R}^k$.*

Definição 1.27 *Denotaremos por E_k o espaço $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) := W_0^{1,2}(\Omega) \times \cdots \times W_0^{1,2}(\Omega)$ munido com a norma*

$$\|u\|_{E_k} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} := \left(\sum_{i=1}^k \|u^i\|^2\right)^{1/2}$$

para $u = (u^1, \cdots, u^k)$, onde

$$\|u^i\| = \left(\int_\Omega |\nabla u^i|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Da mesma forma, $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) := \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)} := \left(\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^i|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Denotaremos também a norma do espaço $L^q(\Omega, \mathbb{R}^k)$ por

$$\|u\|_q := \left(\sum_{i=1}^k \int_\Omega |u^i|^q dx\right)^{1/q}.$$

Definição 1.28 *Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua e homogênea de grau 2^*. Além disso, assuma F positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Definamos*

$$k_F(\Omega) := \sup\left\{ \left(\int_\Omega F(u)dx \right)^{1/2^*} : u \in E_k, \|u\|_{E_k} = 1 \right\}$$

e

$$k_F(\mathbb{R}^n) := \sup\left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx \right)^{1/2^*} : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k), \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = 1 \right\}.$$

Lema 1.29 $k_F(\Omega) = k_F(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Como $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ segue que $k_F(\Omega) \le k_F(\mathbb{R}^n)$. Para a desigualdade contrária considere uma sequência $(u_m) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} F(u_m)dx = 1$ tal que $\|u_m\|^{2^*}_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \to k_F(\mathbb{R}^n)$. Por translação e contração podemos assumir que supp$(u_m) \subset \Omega$, então $u_m \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, logo $k_F(\Omega) \ge \lim_{m\to\infty} u_m = k_F(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 1.30 *Considere uma função F como na definição 1.28. Então*

i) $k_F(\mathbb{R}^n) = M_F^{1/2^*} k(n, 2)$*, onde $k(n, 2)$ é a constante ótima de Sobolev escalar e M_F é o valor máximo da F sobre $\mathbb{S}^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : |t| = 1\}$, com $|t| = (\sum_{i=1}^k |t^i|^2)^{1/2}$;*

ii) $k_F(\mathbb{R}^n)$ *é atingido em aplicações da forma $u = t_0 v_0$, onde $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}$ é um ponto de máximo da F e v_0 é uma função extremal para $k(n, 2)$. Além disso, todas as funções extremais para $k_F(\mathbb{R}^n)$ são dessa forma.*

Demonstração. (i) Como $F(t/|t|) \le M_F$, pela homogeneidade da F temos que $F(t) \le M_F|t|^{2^*}$ para todo $t \in \mathbb{R}^k$, ou seja,

$$F(t) \le M_F \left(\sum_{i=1}^k |t^i|^2 \right)^{2^*/2}.$$

Como $2 < 2^*$ desde que $2 < n$, pela desigualdade de Minkowski e pela desigualdade (1.1) temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx \right)^{2/2^*} &\le M_F^{2/2^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^k |u^i|^2 \right)^{2^*/2} dx \right)^{2/2^*} \\ &\le M_F^{2/2^*} \sum_{i=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u^i|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \\ &\le M_F^{2/2^*} k(n,2)^2 \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^i|^2 dx \\ &\le M_F^{2/2^*} k(n,2)^2 \|u\|_{E_k}^2, \end{aligned} \tag{1.17}$$

então

$$k_F(\mathbb{R}^n)^2 \leq M_F^{2/2^*} k(n,2)^2$$

Considere agora a aplicação $u_0 = t_0 v_0 \in E_k$ onde $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}$ satisfazendo $M_F = F(t_0)$ e v_0 uma função extremal para $k(n,2)$. Da homogeneidade de F e da desigualdade (1.1), temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(u_0)dx\right)^{2/2^*} &= M_F^{2/2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_0|^{2^*}dx\right)^{2/2^*} \\ &= M_F^{2/2^*} k(n,2)^2\|v_0\|^2 \\ &= M_F^{2/2^*} k(n,2)^2\|u_0\|^2_{E_k},\end{aligned}$$

então

$$k_F(\mathbb{R}^n)^2 = M_F^{2/2^*} k(n,2)^2.$$

(ii) Em particular, $u_0 = t_0 v_0$ é uma aplicação extremal para $k_F(\mathbb{R}^n)$. Além disso, toda aplicação extremal para $k_F(\mathbb{R}^n)$ tem essa forma. De fato, se u é uma aplicação extremal então u satisfaz (1.17) com igualdade em todos os passos. Porém, o segundo passo corresponde a desigualdade de Minkowski, logo existe $t_1 \in \mathbb{S}^{k-1}$ e uma função $v_1 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = t_1 v_1$. Finalmente, da primeira igualdade deduzimos que $F(t_1) = M_F$, e, da terceira, que v_1 é uma função extremal para $k(n,2)$. □

Lema 1.31 *Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, uma função positiva em $\mathbb{R}^k\backslash\{0\}$, contínua e homogênea de grau 2^*. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um $C(\epsilon)$ tal que, para todo $a, b \in \mathbb{R}^k$, vale*

$$|F(a) - F(b) - F(a-b)| \leq \epsilon|a-b|^{2^*} + C(\epsilon)|b|^{2^*}.$$

Demonstração. Se $b = 0$, o resultado é óbvio. Então, considere $b \neq 0$.
Suponha, por absurdo, que exita um $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existam a_n e b_n em $\mathbb{R}^k$ que verifiquem a desigualdade

$$|F(a_n) - F(b_n) - F(a_n - b_n)| > \epsilon_0|a_n - b_n|^{2^*} + n|b_n|^{2^*}.$$

Considere $c_n := \dfrac{a_n}{|b_n|}$. Dividindo a desigualdade acima por $|b_n|^{2^*}$, podemos reescrevê-la como

$$|F(c_n) - F(1_n) - F(c_n - 1_n)| - \epsilon_0|c_n - 1_n|^{2^*} > n, \tag{1.18}$$

em que 1_n representa o vetor unitário $\dfrac{b_n}{|b_n|}$.
Vamos dividir a análise dessa desigualdade em dois casos.

Caso 1) $|c_n| \to \infty$.

Colocando $|c_n - 1_n|$ em evidência na desigualdade (1.18) e usando a homogeneidade de F, encontramos

$$|c_n - 1_n|^{2^*}\left(\left|F\left(\frac{c_n}{|c_n - 1_n|}\right) - F\left(\frac{1_n}{|c_n - 1_n|}\right) - F\left(\frac{c_n - 1_n}{|c_n - 1_n|}\right)\right| - \epsilon_0\right) > n. \quad (1.19)$$

Agora, observe que:

1) $|c_n| - 1 \leq |c_n - 1_n|$ e, portanto, $|c_n - 1_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$;

2) Pelo item (1) podemos considerar $|c_n - 1_n| \geq 1$, logo

$$|c_n| \leq |c_n - 1_n| + 1 \leq 2|c_n - 1_n|,$$

isto é,

$$\frac{|c_n|}{|c_n - 1_n|} \leq 2.$$

Assim, $\dfrac{c_n}{|c_n - 1_n|}$ possui uma subsequência convergente (que continuaremos denotando por c_n);

3) Também,

$$\frac{|1_n|}{|c_n - 1_n|} \leq \frac{1}{|c_n| - 1} \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Pelos itens (1), (2) e (3) chegamos a uma contradição em (1.19) quando $n \to \infty$, já que $\lim_{n\to\infty} F\left(\dfrac{c_n}{|c_n - 1_n|}\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(\dfrac{c_n - 1_n}{|c_n - 1_n|}\right)$, $\lim_{n\to\infty} F\left(\dfrac{1_n}{|c_n - 1_n|}\right) = 0$ e $\epsilon_o > 0$.

Caso 2) $|c_n| < C < \infty$.

Por (1.18) e pela homogeneidade, continuidade e positividade da F, temos que

$$\begin{aligned}
n &< |F(c_n) - F(1_n) - F(c_n - 1_n)| - \epsilon_0|c_n - 1_n|^{2^*} \\
&\leq |F(c_n) - F(1_n) - F(c_n - 1_n)| \\
&\leq F(c_n) + F(1_n) + F(c_n - 1_n) \\
&\leq M_F|c_n|^{2^*} + M_F + M_F|c_n - 1_n|^{2^*} \\
&\leq C_1.
\end{aligned}$$

Novamente chegamos a uma contradição quando $n \to \infty$.

□

Teorema 1.32 *(Brezis-Lieb) Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, uma função contínua e homogênea de grau p. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Considere $\left(\int_\Omega F(v_m)dx\right)$ uma sequência limitada e $v_m \to v$ q.t.p. em Ω. Então*

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega (F(v_m) - F(v_m - v))dx = \int_\Omega F(v)dx.$$

Demonstração. Considere as funções

$$f_m^\epsilon = (|F(v_m) - F(v_m - v) - F(v)| - \epsilon|v_m - v|^{2^*})^+.$$

Tomando $a = v_m$ e $b = v$ no Lema anterior, temos que $|f_m^\epsilon| \leq C(\epsilon)|v|^{2^*}$. Como $v \in L^{2^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ já que $\|v\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq \liminf_{m\to\infty} \|v_m\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega F(v_m)dx < C$, então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que $\int_\Omega f_m^\epsilon dx \to 0$ quando $m \to \infty$. Desde que $|F(v_m) - F(v_m - v) - F(v)| \leq f_m^\epsilon + \epsilon|v_m - v|^{2^*}$, obtemos

$$\limsup_{m\to\infty} \int_\Omega |F(v_m) - F(v_m - v) - F(v)| \leq \epsilon C$$

com $C = \sup_m \|v_m - v\|^{2^*}_{2^*} < \infty$. Fazendo $\epsilon \to 0$ o resultado segue. $\square$

Definição 1.33 *Sejam $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional e X um espaço de Banach. Dizemos que J é fracamente semicontínuo inferiormente se para toda sequência $(u_m) \subset X$, com $u_m \rightharpoonup u$, tivermos $J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m)$.*

Teorema 1.34 *Seja $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função limitada inferiormente. Suponha ainda, que L satisfaça*

$$|L(y, z, x)| \leq C(1 + |y|^q + |z|^q), \forall (y, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$$

e que a função $y \to L(y, z, x)$ seja convexa $\forall (z, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Então,

$$J(\omega) = \int_\Omega L(\nabla\omega, \omega, x)dx$$

é fracamente semicontínuo inferiormente em $W^{1,q}(\Omega)$, sendo $1 < q < \infty$.

Demonstração. Consulte [9], Teorema 1, página 446. $\square$

Agora, considere o espaço

$$B(\Omega, \mathbb{R}) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \quad \text{é contínua e limitada em} \quad \Omega\}$$

e o subespaço

$$K(\Omega) = \{u \in B(\Omega, \mathbb{R}) : supp(u) \subset\subset \Omega\}.$$

Defina $\mathcal{C}_0(\Omega) = \overline{K(\Omega)}$ com respeito a norma $\|.\|_\infty$. Então, dada uma medida finita μ em Ω, defina o funcional linear contínuo $T : \mathcal{C}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$T(u) := \langle \mu, u \rangle = \int_\Omega u d\mu.$$

Finalmente, podemos definir a norma de uma medida. Para isso, seja $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço vetorial das medidas finitas definidas em Ω. Assim,

$$\|\mu\| := \sup_{u \in \mathcal{C}_0(\Omega)} \frac{|\langle \mu, u \rangle|}{\|u\|_\infty}.$$

Definição 1.35 *(Convergência fraca de medidas) Dizemos que uma sequência de medida $(\mu_m) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ converge fracamente para a medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, e denotamos por $\mu_m \rightharpoonup \mu$, quando*

$$\langle \mu_m, u \rangle \to \langle \mu, u \rangle, \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Teorema 1.36 *Toda sequência limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$ possui subsequência fracamente convergente em $\mathcal{M}(\Omega)$. Além disso, se $\mu_m \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, então (μ_m) é limitada e*

$$\|\mu\| \leq \liminf_{m \to \infty} \|\mu_m\|.$$

Demonstração. Consulte [17], Teorema 1.39, página 27. □

Exemplo 1.37 *Um exemplo importante desse Teorema, que nos será útil no próximo resultado e no capítulo 3, são as medidas definidas por integrais. De fato, considere uma sequência (u_m) limitada em $W^{1,2}(\Omega)$ e defina a medida $\nu_m = |u_m|^{2^*} dx$, isto é,*

$$\nu_m(E) = \int_E |u_m|^{2^*} dx.$$

Para ver que tal sequência de medidas é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$, basta notar que

$$\|\nu_m\| = \sup_{u \in \mathcal{C}_0(\Omega)} \frac{|\langle \nu_m, u \rangle|}{\|u\|_\infty} \leq \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx = \|u_m\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} < C,$$

para alguma constante C. De forma completamente análoga, se definirmos $\mu_m = |\nabla u_m|^2 dx$, concluiremos que (μ_m) é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Portanto, ambas possuem subsequências fracamente convergentes em $\mathcal{M}(\Omega)$.

Estamos prontos agora para demonstrar o Teorema da Concentração de Compacidade.

Teorema 1.38 *(Concentração de Compacidade) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $n \geq 3$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua homogênea de grau 2^*, $k \geq 1$ e u_m uma sequência limitada em E_k. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$, $u_m \rightharpoonup u$ em E_k e*

$$|\nabla u_m|^2 dx \rightharpoonup \mu, F(u_m) dx \rightharpoonup \nu$$

onde μ e ν são medidas finitas não negativas em $\mathbb{R}^n$. Então, existe um conjunto no máximo contável $(x_i)_{i \in \tau} \subset \overline{\Omega}$ e números reais positivos $(\mu_i)_{i \in \tau}$ e $(\nu_i)_{i \in \tau}$ tais que

i) $M_F{}^{\frac{2}{2^*}} k(n,2)^2 \mu_i \geq \nu_i^{\frac{2}{2^*}}$;

ii) $\mu \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_{i \in \tau} \mu_i \delta_{x_i}$;

iii) $\nu = F(u) dx + \sum_{i \in \tau} \nu_i \delta_{x_i}$,

sendo $k(n,2)$ a constante ótima de Sobolev escalar e δ_{x_i} a medida de Dirac, definida por

$$\delta_{x_i}(E) = \begin{cases} 1 & se \quad x_i \in E, \\ 0 & se \quad x_i \notin E, \end{cases}$$

a qual também é conhecida como medida atômica, sendo x_i seus átomos.

Demonstração. Primeiramente mostraremos (i).
Como $(u_m) \subset E_k$ é tal que $u_m \rightharpoonup u$, segue que $\|u_m\|_{E_k} \leq C$. Usando o fato de que $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$, temos que

$$u_m \to u, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega \quad \text{(a menos de subsequência).}$$

Agora, defina as sequências de medidas

$$\omega_m := F(u_m) dx - F(u) dx \quad \text{e} \quad \lambda_m := |\nabla(u_m - u)|^2 dx.$$

Note que podemos escrever

$$\omega_m = F(u_m - u) dx + f_n,$$

em que

$$f_n = F(u_m) dx - F(u) dx - F(u_m - u) dx \longrightarrow 0$$

por Brezis-Lieb. Em relação à medida λ_m, se considerarmos $\upsilon_m := u_m - u$, como u_m é limitada em E_k, segue que (υ_m) também o é. Logo, a sequência de medidas (λ_m) é limitada. E assim, pelo Teorema 1.36, $\lambda_m \rightharpoonup \lambda$ para alguma medida λ. Além disso, como υ_m também é limitada em $L^{2^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, pelo Teorema 1.30, podemos garantir que $\omega_m \rightharpoonup \omega$, devido a homogeneidade e continuidade da F, para alguma medida ω.

Afirmação: A medida ω pode ter, no máximo, um número enumerável de átomos. De fato, seja $x_{\alpha\in\Lambda}$ o tal conjunto de átomos, sendo Λ um conjunto indexador.

Seja

$$\sum_{\alpha}\nu_\alpha=\omega\bigg(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}x_\alpha\bigg),$$

ou seja, o valor da medida ω sobre o conjunto de átomos. Defina, para $k\in\mathbb{N}$, o conjunto

$$M_k=\left\{x_\alpha:\nu_\alpha>\frac{1}{k}\right\}.$$

Uma vez que ω é finita, podemos afirmar que $\sum\nu_\alpha<\infty$, donde segue que M_k é finito. E assim, o conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty}M_K$ é enumerável, ou seja, o conjunto de átomos é enumerável. Denote por $\{x_i:i\in I\}$ tal conjunto.

Agora, usando o Teorema da Decomposição de Lebesgue, podemos decompor ω da seguinte forma

$$\omega=\omega_0+\sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}\quad\text{como}\quad\omega_0(E)=\begin{cases}\omega(E) & se\quad E\subset\Omega\backslash\{x_i;i\in I\},\\ 0 & se\quad E\subset\{x_i;i\in I\}.\end{cases}$$

O próximo passo será comparar as medidas ω e λ. Assim, dada $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $\varphi v_m\in E_k$. E então, do Teorema 1.30, obtemos

$$\begin{aligned}\bigg(\int_\Omega|\varphi|^{2^*}F(v_m)dx\bigg)^{\frac{2}{2^*}} &= \bigg(\int_\Omega F(\varphi v_m)dx\bigg)^{\frac{2}{2^*}}\\ &\leq k(n,2)^2M_F^{\frac{2}{2^*}}\int_\Omega|\nabla(\varphi v_m)|^2dx\\ &= k(n,2)^2M_F^{\frac{2}{2^*}}\bigg(\int_\Omega|v_m\nabla\varphi|^2dx+2\int_\Omega\varphi v_m\nabla\varphi\nabla v_mdx+\int_\Omega|\varphi\nabla v_m|^2dx\bigg)\\ &\leq C\int_\Omega|v_m|^2dx+C\bigg(\int_\Omega|\nabla v_m|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg(\int_\Omega|v_m|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad+\quad k(n,2)^2M_F^{\frac{2}{2^*}}\int_\Omega|\varphi|^2|\nabla v_m|^2dx. \end{aligned}\tag{1.20}$$

Como $F(v_m)dx\rightharpoonup\omega$ e $|\nabla v_m|^2dx\rightharpoonup\lambda$, temos que

$$\int_\Omega|\varphi|^{2^*}F(v_m)dx\to\int_\Omega|\varphi|^{2^*}d\omega\quad\text{e}\quad\int_\Omega|\varphi|^2|\nabla v_m|^2dx\to\int_\Omega|\varphi|^2d\lambda.$$

Além disso, como $v_m\to0$ em $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$, tomando o limite em m na desigualdade (1.20), obtemos

$$\bigg(\int_\Omega|\varphi|^{2^*}d\omega\bigg)^{\frac{2}{2^*}}\leq k(n,2)^2M_F^{\frac{2}{2^*}}\int_\Omega|\varphi|^2d\lambda,\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega).\tag{1.21}$$

Agora, considere um átomo x_i da medida ω. Tome $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, com $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi_\epsilon(x_i) = 1$ e $\varphi_\epsilon \equiv 0$ em $B^c(x_i, \epsilon)$. Logo

$$\left(\int_{B(x_i,\epsilon)} |\varphi_\epsilon|^{2^*} d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq k(n,2)^2 M_F^{\frac{2}{2^*}} \int_{B(x_i,\epsilon)} |\varphi_\epsilon|^2 d\lambda.$$

E, portanto, fazendo $\epsilon \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\nu_i^{\frac{2}{2^*}} \leq k(n,2)^2 M_F^{\frac{2}{2^*}} \lambda(\{x_i\}).$$

Por outro lado, para toda $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi|\nabla v_m|^2 dx &= \int_\Omega \phi|\nabla u_m - \nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \phi(|\nabla u_m|^2 + 2|\nabla u_m||\nabla u| + |\nabla u|^2) dx \\ &\leq \int_\Omega \phi|\nabla u_m|^2 dx + C\left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\phi \nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega \phi|\nabla u|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \phi|\nabla u_m|^2 dx + C_1\left(\int_\Omega |\phi|^2|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega \phi|\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Como anteriormente, fixe x_i e considere $0 \leq \phi_\epsilon \leq 1$ em $C_c^\infty(\Omega)$, $\phi_\epsilon(x_i) = 1$ e $\phi_\epsilon \equiv 0$ em $B^c(x_i, \epsilon)$. Daí, como $|\nabla v_m|^2 dx \rightharpoonup \lambda$ e $|\nabla u_m|^2 dx \rightharpoonup \mu$, fazendo $\phi = \phi_\epsilon$ em (1.22) e tomando o limite em m, obtemos

$$\int_{B(x_i,\epsilon)} \phi_\epsilon d\lambda \leq \int_{B(x_i,\epsilon)} \phi_\epsilon d\mu + C_1\left(\int_{B(x_i,\epsilon)} |\phi_\epsilon|^2 |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_{B(x_i,\epsilon)} \phi_\epsilon |\nabla u|^2 dx.$$

Finalmente, fazendo $\epsilon \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lambda(\{x_i\}) \leq \mu(\{x_i\}) := \mu_i.$$

Portanto

$$\nu_i^{\frac{2}{2^*}} \leq k(n,2)^2 M_F^{\frac{2}{2^*}} \mu_i.$$

Provaremos agora a afirmação (ii).

Primeiro, note que $\mu \geq |\nabla u|^2 dx$. De fato, dada $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, considere o funcional $f_\phi : E_k \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f_\phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi dx.$$

Como $L(y,z,x) = |y|^2$ é estritamente convexa em y e ϕ é positiva, segue que $\phi|\nabla u|^2$ é convexa, assim, temos que f_ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente pelo Teorema 1.34. Logo, como $u_m \rightharpoonup u$ em E_k, segue que

$$\int_\Omega \phi d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \phi|\nabla u_m|^2 dx = \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \phi|\nabla u_m|^2 dx$$

$$= \liminf_{m\to\infty} f_\phi(u_m) \geq f_\phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi dx.$$

Seja $E \subset \Omega$ um conjunto mensurável qualquer. Assim, $\chi_E \in L^2(\Omega)$, uma vez que Ω tem medida finita. Logo, como χ_E é uma função não negativa e limitada, da teoria da medida sabemos que existe uma sequência uniformemente limitada $0 \leq \phi_m \leq M$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_m \to \chi_E$ q.t.p. em Ω. Então, como vale

$$\int_\Omega \phi_m d\mu \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi_m dx, \quad \forall m,$$

segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\mu(E) = \int_\Omega \chi_E d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \phi_m d\mu$$

$$\geq \lim_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla u|^2 \phi_m dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \chi_E dx = \int_E |\nabla u|^2 dx.$$

Provamos assim que $\mu \geq |\nabla u|^2 dx$. Juntando isso ao fato de que as medidas $|\nabla u|^2 dx$ e $\sum_i \mu_i \delta_{x_i}$ são mutuamente singulares, segue do Teorema da Decomposição de Lebesgue que

$$\mu \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_i \mu_i \delta_{x_i}.$$

Finalmente, provaremos a afirmação (iii).

Comecemos mostrando que $\omega_0 << \lambda$, ou seja, dado $E \subset \Omega$ tal que $\lambda(E) = 0$, então $\omega_0(E) = 0$. Antes, porém, note que é suficiente considerarmos $E \subset \Omega\backslash\{x_i : i \in I\}$ uma vez que ω_0 é uma parte de ω que não apresenta átomos. Assim, tome $E \subset \Omega\backslash\{x_i : i \in I\}$ tal que $\int_E d\lambda < k(n,2)^{-2} M_F^{\frac{-2}{2^*}}$. Considerando, novamente, uma sequência uniformemente limitada $\phi_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_m \to \chi_E$ q.t.p. em Ω, de (1.21) obtemos

$$\left(\int_\Omega |\phi_m|^{2^*} d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq k(n,2)^2 M_F^{\frac{2}{2^*}} \int_\Omega |\phi_m|^2 d\lambda.$$

Fazendo $m \to \infty$, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\left(\int_E d\omega\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq k(n,2)^2 M_F^{\frac{2}{2^*}} \int_E d\lambda < 1.$$

Portanto,

$$1 \geq k(n,2)^2 M_F^{\frac{2}{2^*}} \int_E d\lambda \geq \int_E d\omega. \tag{1.23}$$

Seja $E \subset \Omega\backslash\{x_i : i \in I\}$ tal que $\lambda(E) = \int_E d\lambda = 0$. Como a desigualdade (1.23) vale nesse caso também, segue que $\omega_0(E) = 0$, donde obtemos que $\omega_0 << \lambda$. O próximo passo é provar que $\omega_0 \equiv 0$. Antes, porém, note que isso já ocorre no conjunto $\{x_i : i \in I\}$. Como $\omega_0 << \lambda$, pelo Teorema de Radon-Nikodym, exite uma função λ-integrável não negativa, tal que

$$\omega_0(E) = \int_E f d\lambda, \quad \forall E \subset \Omega \backslash \{x_i : i \in I\} \quad \text{mensurável.}$$

Em particular, para $E = \{y\}$, em que $y \in \Omega \backslash \{x_i : i \in I\}$, obtemos

$$0 = \omega_0(\{y\}) = \int_{\{y\}} f d\lambda = f(y)\lambda(\{y\}).$$

Como λ tem, eventualmente, mais átomos do que ω, pode ocorrer que $\lambda(\{y\}) \neq 0$ e, neste caso, $f(y) = 0$. No entanto, se ocorrer $\lambda(\{y\}) = 0$, observe o seguinte: Pelo Teorema de Radon-Nikodym, sabemos que

$$f(y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\int_{B_\rho(y)} d\omega_0}{\int_{B_\rho(y)} d\lambda}.$$

Daí, usando (1.21), obtemos

$$k(n,2)^{-2} M_F^{\frac{-2}{2^*}} f(y)^{\frac{2}{2^*}} = k(n,2)^{-2} M_F^{\frac{-2}{2^*}} \left(\lim_{\rho \to 0} \frac{\int_{B_\rho(y)} d\omega_0}{\int_{B_\rho(y)} d\lambda} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \lim_{\rho \to 0} \frac{\int_{B_\rho(y)} d\lambda}{\left(\int_{B_\rho(y)} d\lambda \right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Assim,

$$k(n,2)^{-2} M_F^{\frac{-2}{2^*}} f(y)^{\frac{2}{2^*}} \leq \lim_{\rho \to 0} \left(\int_{B_\rho(y)} d\lambda \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} = 0.$$

Portanto, $f(y) = 0$ para quase todo ponto $y \in \Omega \backslash \{x_i : i \in I\}$. De qualquer forma $f(y) = 0$ q.t.p. em $\Omega \backslash \{x_i : i \in I\}$. Logo, como $\omega_0(E) = \int_E f d\lambda = 0$, segue que $\omega_0 = 0$. E assim, temos que ω contém apenas átomos. Por outro lado, sabemos que $\omega_m = F(u_m) - F(u)dx \rightharpoonup \omega$ e $F(u_m)dx \rightharpoonup \nu$, então $\omega = \nu - F(u)dx$. E, como $\omega = \omega_0 + \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}$, temos que

$$\nu = F(u)dx + \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}.$$

$\square$

Capítulo 2

Existência de Minimizante e Solução Fraca Não Trivial

2.1 Existência de Minimizante

Antes de entrarmos diretamente no assunto desta seção, precisamos definir o primeiro autovalor λ_1 e mostrar que ele realmente é atingido para alguma função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, em que Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1 *Definamos*

$$\lambda_1 := \inf_{u \in \mathcal{H}} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right\} \tag{2.1}$$

em que $\mathcal{H} = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega |u|^2 dx = 1\}$.

Lema 2.2 *Existe uma função* $u_0 \in \mathcal{H}$ *tal que* $\lambda_1 = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx$.

Demonstração. Considere uma sequência $(u_m) \subset \mathcal{H}$ tal que $\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \to \lambda_1$. Pela definição de ínfimo, para todo $k > 0$ existe um $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \leq \lambda_1 + k, \quad \forall m \geq n_0.$$

Assim, $\|u_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C$. Pela reflexividade de $W_0^{1,2}(\Omega)$ temos que existe uma subsequência que converge fracamente para algum $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é,

$$u_m \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad W_0^{1,2}(\Omega).$$

Da análise funcional, sabemos que

$$\|u_0\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \liminf_{m \to \infty} \|u_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \lim_{m \to \infty} \|u_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \lambda_1^{1/2} \tag{2.2}$$

Por outro lado, como $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, existe uma subsequência de (u_m) que converge forte para algum u_1 em $L^2(\Omega)$. Provaremos que $u_0 = u_1$ q.t.p. em Ω. De fato, seja $\varphi \in L^2(\Omega)^*$ então $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$, pois

$$|\varphi(u)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)^*}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Como $\varphi(u_m) \to \varphi(u_1)$ em $L^2(\Omega)$ e $\varphi(u_m) \to \varphi(u_0)$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, segue que

$$\|\varphi(u_0) - \varphi(u_1)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi(u_0) - \varphi(u_m)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi(u_m) - \varphi(u_1)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

quando $m \to \infty$. Portanto, $\varphi(u_0) = \varphi(u_1)$ para toda $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$. Pelo teorema de Banach,

$$\|u_0 - u_1\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi \in L^2(\Omega)^* \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\varphi(u_0 - u_1)|}{\|\varphi\|} = 0$$

logo $u_0 = u_1$ q.t.p. em Ω. De modo que $u_m \to u_0$ em $L^2(\Omega)$. Daí, como $\int_\Omega |u_m|^2 dx = 1$, só podemos ter que $\int_\Omega |u_0|^2 dx = 1$, ou seja, $u_0 \in \mathcal{H}$.

Além disso, a definição de ínfimo também fornece que

$$\lambda_1 \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3), vale que

$$\lambda_1 = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx$$

com $u_0 \in \mathcal{H}$. □

Observe que λ_1 é o menor autovalor positivo do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

De fato, seja u uma solução do sistema acima. Assim,

$$-\Delta u \cdot u = \lambda u \cdot u.$$

Integrando por partes, encontramos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_\Omega |u|^2 dx,$$

logo,

$$\lambda_1 \leq \lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}.$$

Agora, sejam $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções homogêneas de graus 2^* e 2, respectivamente. Assuma também que $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Recordando que $E_k = W_0^{1,2}(\Omega) \times \cdots \times W_0^{1,2}(\Omega)$, estamos interessados em olhar o seguinte problema de minimização:

$$\begin{cases} \text{mínimo de} \quad \Phi(u) \\ \text{restrito a} \quad u \in E_F \end{cases}$$

em que $E_F = \{u \in E_k : \int_\Omega F(u)dx = 1\}$ e $\Phi : E_k \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx.$$

Vamos denotar o menor nível de energia associado a Φ sobre E_F como

$$c_F := \inf_{u \in E_F} \Phi(u)$$

e o conjunto correspondente por

$$X_F := \{u \in E_F : \Phi(u) = c_F\}.$$

Além disso, definamos

$$M_G := max_{|t|=1} G(t),$$

em que $|t| = \left(\sum_{i=1}^k {t^i}^2\right)^{1/2}$ e,

$$\lambda_{1,G} := \inf_{u \in E_G} \|u\|_{E_k}^2,$$

onde $E_G := \{u \in E_k : \int_\Omega G(u) = 1\}$.

Lema 2.3 *O ínfimo c_F é finito quando $M_G < \lambda_1$.*

Demonstração. Da homogeneidade e continuidade da G segue que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - M_G \int_\Omega |u|^2 dx \\ &\geq \lambda_1 \int_\Omega |u|^2 dx - M_G \int_\Omega |u|^2 dx \\ &= (\lambda_1 - M_G) \int_\Omega |u|^2 dx \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Pelo Lema acima, faz sentido procurarmos funções $u \in E_F$ tais que $\Phi(u) = c_F$. Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que, com as hipóteses devidas, isso de fato acontece.

Lema 2.4 *Assuma que G é positiva em algum lugar de modo que $M_G > 0$. Então*

$$\lambda_{1,G} = \frac{\lambda_1}{M_G}.$$

Demonstração. Como $G(t) \leq M_G|t|^2$, para $u \in E_G$ temos

$$1 = \int_\Omega G(u)dx \leq M_G \int_\Omega |u|^2 dx = M_G \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega |u^i|^2 dx = M_G \|u\|_2^2.$$

Também, para toda $u \in E_k$, vale que

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega |u^i|^2 dx \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_1^{-1} \int_\Omega |\nabla u^i|^2 dx = \lambda_1^{-1} \|u\|_{E_k}^2$$

ou seja,

$$\inf_{u \in E_k \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{E_k}^2}{\|u\|_2^2} \geq \lambda_1.$$

Assim,

$$\lambda_{1,G} = \inf_{u \in E_G} \|u\|_{E_k}^2 \geq \frac{1}{M_G} \inf_{u \in E_G} \frac{\|u\|_{E_k}^2}{\|u\|_2^2} \geq \frac{1}{M_G} \inf_{u \in E_k \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{E_k}^2}{\|u\|_2^2} \geq \frac{\lambda_1}{M_G}.$$

Para a desigualdade contrária escolha $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}$ tal que $G(t_0) = M_G$ e $\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma autofunção associada a λ_1. Então, $\theta_1 = t_0\varphi_1 \in E_k$ e

$$\lambda_{1,G} \leq \frac{\|\theta_1\|_{E_k}^2}{\int_\Omega G(\theta_1)dx} = \frac{1}{M_G} \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2 dx}{\int_\Omega |\varphi_1|^2 dx} = \frac{\lambda_1}{M_G},$$

pois

$$\frac{\theta_1}{\left(\int_\Omega G(\theta_1)dx\right)^{1/2}} \in E_G.$$

□

Observe que se estivéssemos considerando $G \in C^1$, então $\lambda_{1,G}$ seria o menor autovalor positivo do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

em que $g(u) = \frac{1}{2}\nabla G(u)$. De fato, se u é uma autofunção associada a um autovalor λ, então

$$-\Delta u \cdot u = \lambda g(u) \cdot u.$$

Integrando por partes e lembrando que $g(u) \cdot u = G(u)$ devido a homogeneidade de G, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_\Omega g(u) \cdot u dx = \lambda \int_\Omega G(u) dx.$$

Assim,

$$\lambda_{1,G} \leq \lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega G(u)dx}.$$

Agora, considere o funcional sobre E_k

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx.$$

Vamos caracterizar a coercividade de Φ sobre E_k em termos de G e λ_1.

Lema 2.5 *O funcional Φ é coercivo sobre E_k se, e somente se, $M_G < \lambda_1$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.4 é suficiente mostrar que Φ é coercivo se, e somente se $\lambda_{1,G} > 1$. Assuma que Φ é coercivo sobre E_k, então existe uma constante $0 < a < 1$ tal que

$$\Phi(u) = \|u\|_{E_k}^2 - 1 \geq a\|u\|_{E_k}^2$$

para qualquer $u \in E_G$. Em outras palavras,

$$\|u\|_{E_k}^2 \geq \frac{1}{1-a}$$

para qualquer $u \in E_G$, de modo que

$$\lambda_{1,G} = \inf_{u \in E_G} \|u\|_{E_k}^2 \geq \frac{1}{1-a} > 1.$$

Agora, assuma que $\lambda_{1,G} > 1$ e $u \in E_k$ fixo. Se

$$\int_\Omega G(u)dx \leq 0$$

é claro que

$$\Phi(u) = \|u\|_{E_k}^2 - \int_\Omega G(u)dx \geq \|u\|_{E_k}^2 \geq a\|u\|_{E_k}^2$$

para qualquer constante $0 < a < 1$. Caso contrário, pela definição de $\lambda_{1,G}$, temos

$$\frac{\|u\|_{E_k}^2}{\int_\Omega G(u)dx} \geq \lambda_{1,G},$$

então

$$\Phi(u) = \|u\|_{E_k}^2 - \int_\Omega G(u)dx \geq \|u\|_{E_k}^2 - \frac{1}{\lambda_{1,G}}\|u\|_{E_k}^2 = \frac{\lambda_{1,G} - 1}{\lambda_{1,G}}\|u\|_{E_k}^2.$$

Isto encerra a demonstração. □

Lema 2.6 *Se*

$$c_F = \inf_{u \in E_F} \Phi(u) < k_F(\mathbb{R}^n)^{-2},$$

então a restrição $\Phi|_{E_F}$ *admite um ponto de mínimo.*

Demonstração. Seja $(u_m) \subset E_F$ uma sequência minimizante para c_F. Pela coercividade de Φ, temos que (u_m) é limitada em E_k. Assim, pela reflexividade, existe uma subsequência tal que

$$u_m \rightharpoonup u$$

para alguma função u em E_k.

Por Rellich-Kondrachov,

$$u_m \to u$$

em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Além disso, como $(u_m) \subset E_F$, então $\int_\Omega |u_m|^{2^*} dx \leq c \int_\Omega F(u_m) dx = c$, logo, pela reflexividade de $L^{2^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e pelo Teorema 1.1, existem subsequências tais que

$$u_m \rightharpoonup u$$

em $L^{2^*}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e

$$u_m \to u$$

q.t.p. em Ω.

Considere o funcional linear limitado $f : E_K \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

sendo que $\nabla u \cdot \nabla v := \sum_{i=1}^k \nabla u^i \nabla v^i$.

A convergência fraca em E_k produz $f(u_m) \to f(u)$, de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2 dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_m|^2 + |\nabla u|^2 - 2\nabla u_m \nabla u dx \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pelo Lema de Brezis-Lieb, segue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega F(u_m) dx - \lim_{m\to\infty} \int_\Omega F(u_m - u) dx = \int_\Omega F(u) dx. \tag{2.7}$$

Além disso, a desigualdade de Sobolev fornece

$$\left(\int_\Omega F(u_m - u) dx \right)^{2/2^*} \leq k_F(\mathbb{R}^n)^2 \int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2 dx. \tag{2.8}$$

Como $\int_\Omega F(u_m)dx = 1$ para todo m, de (2.6), (2.7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned}\left(1-\int_\Omega F(u)dx\right)^{2/2^*} &= \left(\lim_{m\to\infty}\int_\Omega F(u_m)dx - \int_\Omega F(u)dx\right)^{2/2^*}\\ &= \left(\lim_{m\to\infty}\int_\Omega F(u_m-u)dx\right)^{2/2^*}\\ &\le k_F(\mathbb{R}^n)^2\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla(u_m-u)|^2dx\\ &= k_F(\mathbb{R}^n)^2\left(\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_m|^2dx - \int_\Omega |\nabla u|^2dx\right).\end{aligned}$$

Note que

$$\int_\Omega G(u_m)dx \to \int_\Omega G(u)dx$$

quando $m \to \infty$, desde que $G(u) \le M_G|u|^2$. De fato, como $u_m \to u$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$, segue pelo Teorema 1.1 que para cada $1 \le i \le k$, $u_m^i \to u$ q.t.p. em Ω e $|u_m^i| \le g^i$ com $g^i \in L^2(\Omega)$. Assim, $G(u_m) \to G(u)$ q.t.p. em Ω e $|G(u_m)| \le M_G g$ com $g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$. O resultado segue do Teorema da Convergência Dominada.

Assim,

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_m|^2dx - \int_\Omega |\nabla u|^2dx = \lim_{m\to\infty}\Phi(u_m) - \Phi(u) = c_F - \Phi(u).$$

Então,

$$k_F(\mathbb{R}^n)^2\left(\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_m|^2dx - \int_\Omega |\nabla u|^2dx\right) = k_F(\mathbb{R}^n)^2(c_F - \Phi(u)),$$

de modo que

$$\left(1-\int_\Omega F(u)dx\right)^{2/2^*} \le k_F(\mathbb{R}^n)^2(c_F - \Phi(u)).$$

Usando que

$$\Phi(u) \ge c_F\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^{2/2^*}$$

para toda $u \in E_k$, obtemos

$$\left(1-\int_\Omega F(u)dx\right)^{2/2^*} \le k_F(\mathbb{R}^n)^2 c_F\left(1-\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^{2/2^*}\right).$$

Pelo Lema de Fatou, temos

$$\int_\Omega F(u)dx \le \liminf_{m\to\infty}\int_\Omega F(u_m)dx = 1.$$

Mas, por hipótese $k_F(\mathbb{R}^n)^2 c_F < 1$, logo

$$\int_\Omega F(u)dx = 1.$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx &= c_F - \Phi(u) \\
&\leq c_F - c_F\left(\int_\Omega F(u)dx\right)^{2/2^*} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Assim, por (2.6), encontramos

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2 dx = 0.$$

Portanto $u_m \to u$ em E_k e

$$
\begin{aligned}
c_F &= \lim_{m\to\infty}\Phi(u_m) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega G(u_m)dx\right) \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u)dx \\
&= \Phi(u),
\end{aligned}
$$

com $u \in E_F = \{u \in E_k : \int_\Omega F(u)dx = 1\}$. □

No próximo Teorema faremos uso da seguinte fórmula para o cálculo de integrais:

Lema 2.7 *(Fórmula da Coárea) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja contínua e integrável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_r} f ds\right) dr,$$

sendo S_r a esfera em $\mathbb{R}^n$ de raio r.

Demonstração. Consulte [9], Teorema 5, página 629. □

Para facilitar a notação iremos supor que $0 \in \Omega$. Isto pode ser feito, já que o problema é invariante por translações.

Teorema 2.8 *Sejam $n \geq 4$, $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas homogêneas de graus 2^* e 2, respectivamente e F positiva em $\mathbb{R}^k\backslash\{0\}$. Se $G(t_0) > 0$ para algum ponto de máximo t_0 de F sobre $\mathbb{S}^{k-1}$, então o funcional $\Phi|_{E_F}$ admite um ponto de mínimo.*

Demonstração. Provaremos que

$$c_F = \inf_{u \in E_F} \Phi(u) < k_F(\mathbb{R}^n)^{-2}.$$

Para isso devemos avaliar o quociente

$$S := \frac{\int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2 dx - G(t_0) \int_\Omega |w_\epsilon|^2 dx}{M_F^{2/2^*} (\int_\Omega |w_\epsilon|^{2^*})^{2/2^*}}$$

onde $w_\epsilon = \dfrac{\varphi}{(\epsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}}$, sendo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & se \quad |x| > 2\delta, \\ 1 & se \quad |x| < \delta, \end{cases}$$

com $\delta > 0$.

i) Vamos avaliar primeiro

$$\int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2 dx.$$

Como

$$\frac{\partial w_\epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (\epsilon + |x|^2)^{(2-n)/2} - (n-2) x_i \varphi (\epsilon + |x|^2)^{-n/2},$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2 dx &= (n-2)^2 \int_\Omega \varphi^2 |x|^2 (\epsilon + |x|^2)^{-n} dx \\ &\quad -2(n-2) \int_\Omega \varphi (\epsilon + |x|^2)^{1-n} x \cdot \nabla \varphi dx \\ &\quad + \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 (\epsilon + |x|^2)^{2-n} dx \end{aligned} \tag{2.9}$$

Iremos mostrar a integrabilidade de cada uma das integrais do lado direito e obter uma estimativa para a primeira delas.

Por uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\varphi^2 |x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n} dx &\leq \int_\Omega \frac{|x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n} dx \\ &= \epsilon^{1-n} \int_\Omega \frac{|x\epsilon^{-1/2}|^2}{(1 + |x\epsilon^{1/2}|^2)^n} dx \\ &= \epsilon^{(2-n)/2} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n} dx. \end{aligned}$$

Note que $\dfrac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n}$ é integrável em $\mathbb{R}^n$.

De fato, como $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, existe $r_0 > 0$ tal que $\Omega_\epsilon \subset B(0, r_0)$. Daí,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n} dx \leq \int_{B(0,r_0)} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n} dx.$$

Logo, pela fórmula da coárea, tem-se que

$$\int_{B(0,r_0)} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n} dx = \int_0^{r_0} \left(\int_{S_r} \frac{r^2}{(1+r^2)^n} ds \right) dr,$$

sendo S_r a esfera de $\mathbb{R}^n$ de raio r. Considerando o volume da esfera unitária $|S_1| = C$ e aplicando uma mudança de variáveis, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_0^{r_0} \left(\int_{S_r} \frac{r^2}{(1+r^2)^n} ds \right) dr &= C \int_0^{r_0} \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} dr \\
&\leq C \left[\int_0^{r_1} \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} dr + \int_{r_1}^{r_0} \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} dr \right] \\
&\leq C \left[\int_0^{r_1} r^{n+1} dr + \int_{r_1}^{r_0} \frac{r^{n+1}}{r^{2n}} dr \right] \\
&= \overline{C} + C \int_{r_1}^{r_0} r^{1-n} dr \\
&= \overline{C_1} + C \frac{r^{2-n}}{2-n} \bigg|_{r_1}^{r_0} \\
&= \overline{C_2} + \frac{C}{(2-n) r_0^{n-2}}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n} dx = \lim_{r_0 \to \infty} \int_0^{r_0} \left[\int_{S_r} \frac{r^2}{(1+r^2)^n} ds \right] dr.$$

Como $n \geq 4$,

$$\lim_{r_0 \to \infty} \int_0^{r_0} \left[\int_{S_r} \frac{r^2}{(1+r^2)^n} ds \right] dr = \lim_{r_0 \to \infty} \overline{C_2} + \frac{C}{(2-n) r_0^{n-2}} < \infty.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\varphi |x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n} dx &\leq \epsilon^{(2-n)/2} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n} dx \\
&\leq \epsilon^{(2-n)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n} dx.
\end{aligned}$$

E assim,

$$(n-2)^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2 |x|^2}{(\epsilon + |x|^2)^n} dx \leq (n-2)^2 \epsilon^{(2-n)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n} dx.$$

Para a segunda integral em (2.9), veja que $(\epsilon + |x|^2)^{1-n} \leq |x|^{2(1-n)}$, portanto

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \varphi (\epsilon + |x|^2)^{1-n} x \cdot \nabla \varphi dx \right| &\leq C \int_{B^c(0,\delta) \cap \Omega} (\epsilon + |x|^2)^{1-n} |x| dx \\
&\leq C \int_{B^c(0,\delta) \cap \Omega} \frac{1}{|x|^{2n-3}} . dx
\end{aligned}$$

Para ver que a última integral é finita, basta usar a fórmula da coárea. De forma análoga, prova-se que

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2(\epsilon+|x|^2)^{2-n}dx<\infty.$$

De todas essas estimativas, encontramos

$$\int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2dx \leq (n-2)^2\epsilon^{(2-n)/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}dx+C_1$$

para alguma constante $C_1>0$ que não depende de ϵ.

ii) Análise de $\left(\int_\Omega |w_\epsilon|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}$.

Pela definição de w_ϵ, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_\epsilon|^{2^*}dx &= \int_{B(0,\delta)}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx+\int_{B^c(0,\delta)\cap\Omega}\frac{|\varphi|^{2^*}}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx\\ &\geq \int_{B(0,\delta)}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx.\end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^n}dx &= \epsilon^{-n}\int_{B(0,\delta)}\frac{1}{(1+|x\epsilon^{-1/2}|^2)^n}dx\\ &= \epsilon^{-n/2}\int_{B(0,\delta\epsilon^{-1/2})}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\\ &= \epsilon^{-n/2}\Bigg[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\\ &\qquad -\int_{B^c(0,\delta\epsilon^{-1/2})}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\Bigg]\end{aligned}\tag{2.10}$$

Isto é possível porque ambas as integrais são finitas, pois

$$\int_{B(0,r)}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\leq\int_{B(0,r)}dx,$$

e

$$\int_{B^c(0,r)}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx=\int_r^\infty\int_{S_r}\frac{1}{(1+r^2)^n}dsdr\leq\frac{C}{nr^n}.$$

Essa última igualdade juntamente com (2.10), encontramos

$$\int_\Omega |w_\epsilon|^{2^*}dx\geq\epsilon^{-n/2}\Bigg[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx-C\epsilon^{n/2}\Bigg].\tag{2.11}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $y^{2/2^*}$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx-C\epsilon^{n/2}\right)^{2/2^*}-\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\right)^{2/2^*}\geq -C_2\epsilon^{n/2}.$$

Dessa desigualdade e (2.11), segue que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |w_\epsilon|^{2^*}dx\right)^{2/2^*} &\geq [\epsilon^{-n/2}]^{2/2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx - C_2\epsilon^{n/2}\right)^{2/2^*}\\ &= \epsilon^{(2-n)/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx\right)^{2/2^*} - C_2\epsilon.\end{aligned}$$

iii) Finalmente, iremos analisar $\int_\Omega |w_\epsilon|^2dx$.

Pela definição de w_ϵ,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_\epsilon|^2dx &= \int_{B(0,\delta)}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx + \int_{B^c(0,\delta)\cap\Omega}\frac{|\varphi|^2}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx\\ &\geq \int_{B(0,\delta)}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx - \int_{B^c(0,\delta)}\frac{1}{(\epsilon+|x|^2)^{n-2}}dx\\ &= \epsilon^{2-n/2}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}}dx - \int_{B^c(0,\delta\epsilon^{-1/2})}\frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}}dx\right]\end{aligned} \quad (2.12)$$

Vamos separar a análise em dois casos.

Suponha $n > 4$.

Como

$$\begin{aligned}\int_{B^c(0,\delta\epsilon^{-1/2})}\frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}}dx &= \int_{\delta\epsilon^{-1/2}}^\infty\left(\int_{S_r}\frac{1}{(1+r^2)^{n-2}}ds\right)dr\\ &= C\int_{\delta\epsilon^{-1/2}}^\infty\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n-2}}dr\\ &\leq C\int_{\delta\epsilon^{-1/2}}^\infty\frac{r^{n-1}}{r^{2(n-2)}}dr\\ &= C\int_{\delta\epsilon^{-1/2}}^\infty r^{3-n}dr\\ &= \frac{C\epsilon^{(n-4)/2}}{(n-4)\delta^{n-4}},\end{aligned}$$

segue que

$$\int_\Omega |w_\epsilon|^2dx \geq \epsilon^{2-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}}dx - C_3.$$

Por outro lado, para $n = 4$, temos de (2.12) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_\epsilon|^2dx &\geq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^2}dx - \int_{B^c(0,\delta\epsilon^{-1/2})}\frac{1}{(1+|x|^2)^2}dx\\ &= \int_{B(0,\delta\epsilon^{-1/2})}\frac{1}{(1+|x|^2)^2}dx\\ &= C\int_0^{\delta\epsilon^{-1/2}}\frac{r^3}{(1+r^2)^2}dr\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C\Big[\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2}dr + \int_1^{\delta\epsilon^{-1/2}} \frac{r^3}{(1+r^2)^2}dr\Big] \\
&\geq C\int_1^{\delta\epsilon^{-1/2}} \frac{r^3}{(1+r^2)^2}dr \\
&\geq C\int_1^{\delta\epsilon^{-1/2}} \frac{r^3}{r^4}dr \\
&= Cln(\delta\epsilon^{-1/2}) \\
&= C_4 - C_5 ln(\epsilon).
\end{aligned}$$

Pelos itens (i) e (ii), encontramos

$$S \leq \frac{(n-2)^2\epsilon^{(2-n)/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}dx + C_1 - G(t_0)\int_\Omega |w_\epsilon|^2dx}{M_F^{2/2^*}\epsilon^{(2-n)/2}(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx)^{2/2^*} - C_2\epsilon}.$$

Por outro lado sabemos que $h(x) = \dfrac{1}{(1+|x|^2)^{(n-2)/2}}$ é uma função extremal para a desigualdade Ótima de Sobolev, isto é,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|h|^{2^*}dx\right)^{2/2^*} = k(n,2)^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla h|^2dx.$$

Denote

$$k(n,2)^{-2} = \frac{(n-2)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}dx}{(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}dx)^{2/2^*}} := \frac{a}{b}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^{n-2}}dx := d.$$

De modo que, para $n > 4$, obtemos

$$\begin{aligned}
S - k(n,2)^{-2}M_F^{-2/2^*} &\leq \frac{\epsilon^{(2-n)/2}a + C_1 - G(t_0)d\epsilon^{(4-n)/2} + G(t_0)C_3}{\epsilon^{(2-n)/2}M_F^{2/2^*}b - C_2\epsilon} - \frac{a}{bM_F^{2/2^*}} \\
&= \frac{C_1bM_F^{2/2^*} + G(t_0)C_3bM_F^{2/2^*} - C_2\epsilon a + G(t_0)dbM_F^{2/2^*}\epsilon^{(4-n)/2}}{\epsilon^{(2-n)/2}(M_F^{2/2^*}b) - C_2bM_F^{2/2^*}\epsilon} \\
&= \epsilon\frac{bC_1M_F^{2/2^*}\epsilon^{(n-4)/2} + G(t_0)bC_3M_F^{2/2^*}\epsilon^{(n-4)/2} - C_2a\epsilon^{(n-2)/2}}{(M_F^{2/2^*}b)^2 - C_2bM_F^{2/2^*}\epsilon^{n/2}} \\
&\quad -\epsilon\frac{G(t_0)dbM_F^{2/2^*}}{(M_F^{2/2^*}b)^2 - C_2bM_F^{2/2^*}\epsilon^{n/2}} \\
&< 0
\end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Da mesma forma, para $n = 4$, temos que

$$S - k(n,2)^{-2}M_F^{-2/2^*} \leq \frac{\epsilon^{(2-n)/2}a + C_1 - G(t_0)(C_4 - C_5ln(\epsilon))}{\epsilon^{-1}M_F^{2/2^*}b - C_2\epsilon} - \frac{a}{bM_F^{2/2^*}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{C_1 b M_F^{2/2^*} - G(t_0) C_4 b M_F^{2/2^*} + G(t_0) C_5 b M_F^{2/2^*} ln(\epsilon) + C_2 \epsilon a}{\epsilon^{-1}(M_F^{2/2^*} b)^2 - C_2 \epsilon b M_F^{2/2^*}} \\
&= \epsilon \frac{(C_1 - G(t_0) C_4) b M_F^{2/2^*} + G(t_0) C_5 b M_F^{2/2^*} ln(\epsilon) + C_2 a \epsilon}{(M_F^{2/2^*} b)^2 - C_2 b M_F^{2/2^*} \epsilon^2} \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então, para todo $n \geq 4$ vale

$$S < k(n,2)^{-2} M_F^{-2/2^*} = k_F(\mathbb{R}^n)^{-2}.$$

Finalmente, considere $u_\epsilon = t_0 w_\epsilon$. Assim,

$$
\begin{aligned}
c_F &\leq \frac{\Phi(u_\epsilon)}{(\int_{\mathbb{R}^n} F(u_\epsilon) dx)^{2/2^*}} \\
&= \frac{\|u_\epsilon\|_{E_k}^2 - \int_\Omega G(u_\epsilon) dx}{(\int_{\mathbb{R}^n} F(u_\epsilon) dx)^{2/2^*}} \\
&= \frac{\int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2 dx - G(t_0) \int_\Omega |w_\epsilon|^2 dx}{M_F^{2/2^*} (\int_\Omega |w_\epsilon|^{2^*})^{2/2^*}} \\
&= S < k_F(\mathbb{R}^n)^{-2}.
\end{aligned}
$$

Para a conclusão desejada basta aplicar o Lema 2.6. □

Teorema 2.9 *Sejam $n = 3$ e $F, G : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}$ funções homogêneas contínuas de graus 2^* e 2, respectivamente. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Além disso, considere $w_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma autofunção correspondente a λ_1, normalizada de modo que $\int_\Omega |w_0|^{2^*} dx = 1$, e*

$$\overline{\lambda} := \lambda_1 - \left(k(n,2)^2 \int_\Omega |w_0|^2 dx \right)^{-1}.$$

Se $G(t_0) > \overline{\lambda}$ para algum ponto de máximo $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}$ de F, então o funcional $\Phi|_{E_F}$ admite um ponto de mínimo.

Demonstração. Considere a função $u_0 = t_0 w_0 \in E_k$. Então,

$$
\begin{aligned}
c_F &\leq \frac{\Phi(u_0)}{(\int_\Omega F(u_0) dx)^{2/2^*}} \\
&= \frac{\|u_0\|_{E_k}^2 - \int_\Omega G(u_0) dx}{(\int_\Omega F(u_0) dx)^{2/2^*}} \\
&= \frac{\int_\Omega |\nabla w_0|^2 dx - G(t_0) \int_\Omega |w_0|^2 dx}{M_F^{2/2^*}} \\
&= \frac{(\lambda_1 - G(t_0)) \int_\Omega |w_0|^2 dx}{M_F^{2/2^*}} \\
&< k(n,2)^{-2} M_F^{-2/2^*} \\
&= k_F(\mathbb{R}^n)^{-2}.
\end{aligned}
$$

A conclusão segue pelo Lema 2.6. □

2.2 Existência de Solução Fraca Não Trivial

Nesta seção iremos considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + g(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

onde $u = (u^1, \cdots, u^k)$, $\Delta u = (\Delta u^1, \cdots, \Delta u^k)$, $k \geq 1$, $f(u) = \dfrac{1}{2^*}\nabla F(u)$ e $g(u) = \dfrac{1}{2}\nabla G(u)$, em que $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 homogêneas de graus 2^* e 2, respectivamente, com F positiva em $\mathbb{R}^k\backslash\{0\}$.

Para determinar soluções de (2.13) faremos uso do chamado "*método variacional*", o qual consiste em reescrever o problema de forma fraca, associar um funcional a esse problema e estudar a existência de pontos críticos para esse funcional. Para isso, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.10 *(Multiplicador de Lagrange) Sejam F e G funcionais de classe C^1 sobre um espaço de Banach X. Suponha, para $x_0 \in X$, que tenhamos $G(x_0) = C$ e que x_0 é um ponto de extremo local para F quando restrito ao conjunto*

$$\mathcal{C} = \{x \in X : G(x) = C\}.$$

Então,

i) $G'(x_0)v = 0$, para todo $v \in X$, ou

ii) Existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $F'(x_0)v = \mu G'(x_0)v$, para todo $v \in X$.

Demonstração. Consulte [14], Teorema 1.25, página 20. □

Estamos prontos para demonstrar dois teoremas sobre existência de soluções.

Teorema 2.11 *Sejam $n \geq 4$, $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 com F homogênea de grau 2^* e G homogênea de grau 2. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k\backslash\{0\}$. Se $M_G < \lambda_1$ e $G(t_0) > 0$ para algum ponto de máximo de F sobre $\mathbb{S}^{k-1}$, então o sistema (2.13) possui uma solução fraca u não trivial.*

Teorema 2.12 *Sejam $n = 3$ e $F, G : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 homogêneas de graus 2^* e 2, respectivamente. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k\backslash\{0\}$. Além disso, considere $w_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma autofunção correspondente a λ_1, normalizada de modo que $\int_\Omega |w_0|^{2^*}dx = 1$, e*

$$\overline{\lambda} := \lambda_1 - \left(k(n,2)^2 \int_\Omega |w_0|^2 dx\right)^{-1}.$$

Se $M_G < \lambda_1$ e $G(t_0) > \overline{\lambda}$ para algum ponto de máximo $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}$ de F, então o sistema (2.13) *admite uma solução fraca u não trivial.*

Demonstraremos apenas o caso em que $n \geq 4$, o outro caso é análogo, basta usar o Teorema 2.9 no lugar de 2.8.

Demonstração. Pelo Teorema 2.8, o funcional $\Phi_G|_{E_F}$ admite um minimizante u. Em particular, existe um multiplicador de Lagrange $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega g(u)\varphi dx = \mu \int_\Omega f(u)\varphi dx$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Além disso,

$$\mu = c_F,$$

pois, para $\varphi = u$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega g(u) \cdot u dx = \mu \int_\Omega f(u) \cdot u dx.$$

Como $\int_\Omega g(u) \cdot u dx = \int_\Omega G(u) dx$ e $\int_\Omega f(u) \cdot u dx = \int_\Omega F(u) dx = 1$, temos que

$$c_F = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega G(u) dx = \mu.$$

Usando a hipótese de que $M_G < \lambda_1$, pelo Lema 2.5, temos que $\mu > 0$. Finalmente, segue que $v = \mu^{\frac{1}{1-2^*}} u$ é uma solução fraca não trivial de (2.13). □

Da teoria clássica de equações elípticas, temos que toda solução fraca de (2.13) está em $W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^k)$. Para a regularidade $C^{1,\alpha}$ consulte [10], Corolário 1.1, e para $W^{2,2}$ consulte [9], Teorema 4, página 317.

Provaremos agora um resultado acerca da não existência de soluções em domínios estrelados assumindo a negatividade de G. Para isso, como no caso clássico, faremos uso da Identidade de Pohozaev.

Lema 2.13 (Identidade de Pohozaev) *Assuma que Ω tem fronteira suave. Seja $u \in W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^k)$ uma solução fraca do sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

em que $h(u) = \nabla H(u)$ para alguma $H \in C^1(\mathbb{R}^k)$ com $H(0) = 0$. Então,

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) ds = 2n \int_\Omega H(u) dx - (n-2) \int_\Omega h(u) \cdot u dx.$$

Demonstração. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta u^l = h_l(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

em que $h_l(u) = \dfrac{\partial H}{\partial u^l}(u)$ com $l = 1, \cdots, k$. Como u é uma solução fraca, as igualdade são válidas q.t.p. em Ω. Assim, multiplicando a l-ésima equação por $x \cdot \nabla u^l$ e integrando em Ω, encontramos

$$-\int_\Omega (\Delta u^l)(x \cdot \nabla u^l)dx = \int_\Omega h_l(u)(x \cdot \nabla u^l)dx \tag{2.14}$$

Reescrevamos esta expressão como

$$A_l = B_l$$

para $l = 1, \cdots, k$.

Usando a fórmula de integração por parte do lado esquerdo, temos que

$$\begin{aligned} A_l &= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u^l_{x_i x_i} x_j u^l_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u^l_{x_i}(x_j u^l_{x_j})_{x_i} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega} u^l_{x_i} \nu^i x_j u^l_{x_j} ds \\ &=: A_{l_1} + A_{l_2} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} A_{l_1} &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u^l_{x_i} \delta_{ij} u^l_{x_j} + u^l_{x_i} x_j u^l_{x_j x_i} dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u^l|^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{|\nabla u^l|^2}{2} \right)_{x_j} x_j dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u^l|^2 dx - n \int_\Omega \frac{|\nabla u^l|^2}{2} dx + \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} \frac{|\nabla u^l|^2}{2} x_j \nu^j ds \\ &= (1 - n/2) \int_\Omega |\nabla u^l|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \frac{|\nabla u^l|^2}{2} (\nu(x) \cdot x) ds \end{aligned} \tag{2.15}$$

Por outro lado, considere a função $\gamma : [-1, 1] \to \partial\Omega$ de classe C^1, com $\gamma(0) = x$. Como $u \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que $u^l(\gamma(t)) = 0$ para todo t. Assim, $u^l(\gamma(t))' = \nabla u^l(\gamma(t))\gamma'(t)$ e então $\nabla u^l(x)\gamma'(t) = 0$. Portanto, $\nabla u^l(x)$ é perpendicular ao espaço tangente $T_x\partial\Omega$. Logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla u^l(x) = \alpha\nu(x)$. Entretanto, como ν é unitário, segue que $\alpha = \pm|\nabla u^l(x)|$ logo $\nabla u^l(x) = \pm|\nabla u^l(x)|\nu(x)$. De modo que

$$A_{l_2} = -\int_{\partial\Omega} |\nabla u^l|^2 (\nu(x) \cdot x) ds. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16), deduzimos que

$$A_l = (1-n/2)\int_\Omega |\nabla u^l|^2 dx - 1/2\int_{\partial\Omega} |\nabla u^l|^2(\nu(x)\cdot x)ds$$

Somando todos os $A_l's$, obtemos

$$\sum_{l=1}^{k} A_l = \left(\frac{2-n}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2(\nu(x)\cdot x)ds.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(u)\cdot u dx &= \sum_{l=1}^{k}\int_\Omega h_l(u)u^l dx \\
&= -\sum_{l=1}^{k}\int_\Omega \Delta u^l u^l dx \\
&= \sum_{l=1}^{k}\int_\Omega |\nabla u^l|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{l=1}^{k} A_l = \left(\frac{2-n}{2}\right)\int_\Omega h(u)\cdot u dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2(\nu(x)\cdot x)ds.$$

Retornando a (2.14), vale que

$$B_l = \int_\Omega h_l(u)(x\cdot\nabla u^l)dx = \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega h_l(u)x_j u^l_{x_j} dx.$$

Somando os $B_l's$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k} B_l &= \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega h_l(u)u^l_{x_j}x_j dx \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega (H(u))_{x_j}x_j dx \\
&= -n\int_\Omega H(u)dx.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left(\frac{2-n}{2}\right)\int_\Omega h(u)\cdot u dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2(\nu(x)\cdot x)ds = \sum_{l=1}^{k} A_l = \sum_{l=1}^{k} B_l = -n\int_\Omega H(u)dx.$$

□

Definição 2.14 *Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é estrelado com respeito à origem se para cada $x \in \overline{\Omega}$, o segmento*

$$\{\lambda x : 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

está em $\overline{\Omega}$.

Proposição 2.15 *Assuma que $\partial\Omega$ é C^1 e Ω é estrelado com respeito à origem. Então*

$$x \cdot \nu(x) \geq 0, \quad \textit{para todo} \quad x \in \partial\Omega,$$

em que $\nu(x)$ denota o vetor normal unitário em x.

Demonstração. Desde que $\partial\Omega$ é C^1, se $x \in \partial\Omega$ então para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta$ e $y \in \overline{\Omega}$ implicam que $\nu(x) \cdot \dfrac{(y-x)}{|y-x|} \leq \epsilon$. Em particular

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \overline{\Omega}}} \nu(x) \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \leq 0.$$

Seja $y = \lambda x$ para $0 < \lambda < 1$. Então $y \in \overline{\Omega}$, já que Ω é estrelado. Portanto

$$\nu(x) \cdot \frac{x}{|x|} = -\lim_{\lambda \to 1^-} \nu(x) \cdot \frac{(\lambda x - x)}{|\lambda x - x|} \geq 0.$$

□

Teorema 2.16 *Assuma que $\partial\Omega$ é C^2. Sejam $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 com F homogênea de grau 2^*, positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$, e G homogênea de grau 2. Se G é negativa em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$ e Ω é estrelado, então o sistema (2.13) não possui soluções fracas não triviais.*

Demonstração. Considere

$$H(u) = \frac{1}{2^*} F(u) + \frac{1}{2} G(u).$$

Como F e G são homogêneas de classe C^1, sabemos que $f(u) \cdot u = F(u)$ e $g(u) \cdot u = G(u)$. Logo,

$$h(u) \cdot u = F(u) + G(u).$$

Seja $u \in E_k$ uma solução fraca de (2.13), então $u \in W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^k) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^k)$. Aplicando o Lema anterior na função H acima, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) ds &= 2n \int_\Omega \frac{1}{2^*} F(u) + \frac{1}{2} G(u) dx - (n-2) \int_\Omega F(u) + G(u) dx \\ &= 2 \int_\Omega G(u) dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Como Ω é estrelado, $x \cdot \nu(x) \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Em particular, o lado esquerdo de (2.17) é não negativo. Portanto, se G é negativa em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$, então o lado direito é negativo a menos que $u \equiv 0$. □

Para finalizar esta seção daremos um exemplo de uma função G para a qual o sistema (2.13) não admite soluções positivas quando $\lambda_{1,G} \leq 1$.

Exemplo 2.17 *Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função C^1 com F homogênea de grau 2^* e positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$, satisfazendo $D_{t_i}F(t) > 0$ sobre $\{t \in \mathbb{R}^k : t_j > 0, j = 1, \cdots, k\}$ Considere $G(t) = \sum_{i=1}^k \beta_i t_i^2$ em que $\beta_i > 0$, para $i = 1, \cdots, k$. Se $M_G \geq \lambda_1$, então o sistema (2.13) não admite uma solução fraca positiva, isto é, soluções cujas coordenadas são funções não negativas e não nulas.*

Demonstração. Suponha que $u \in E_k$ é uma solução positiva de (2.13) e considere $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma autofunção positiva associada ao autovalor λ_1. Pela observação (2.5), temos que $u_1 = t_0\varphi \in E_k$ é uma autofunção associada a $\lambda_{1,G}$ e é claro que u_1 tem todas as entradas positivas. Então

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_1 dx = \int_\Omega f(u) \cdot u_1 + g(u) \cdot u_1 dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u = \lambda_{1,G} \int_\Omega g(u_1) \cdot u dx.$$

Observando que $g(u_1) \cdot u = g(u) \cdot u_1$ e $\lambda_{1,G} = \dfrac{\lambda_1}{M_G}$, temos que

$$\lambda_{1,G} \int_\Omega g(u_1) \cdot u dx = \int_\Omega f(u) \cdot u_1 + g(u) \cdot u_1 dx \geq \int_\Omega g(u) \cdot u_1 dx = \int_\Omega g(u_1) \cdot u dx$$

logo

$$0 \geq (1 - \lambda_{1,G}) \int_\Omega g(u_1) \cdot u dx \geq 0.$$

Se $\lambda_{1,G} = 1$ então $\int_\Omega f(u) \cdot u_1 dx = 0$.
Se $\lambda_{1,G} \neq 1$ então $\int_\Omega g(u) \cdot u_1 dx = 0$.
De qualquer forma temos uma contradição, já que ambas as integrais são não nulas. □

Capítulo 3

Limitação Uniforme dos Minimizantes de Funcionais Não Suaves

No capítulo anterior mostramos que, sob hipóteses convenientes, o conjunto

$$X_F = \{u \in E_F : \Phi(u) = c_F\}$$

é não vazio. Neste capítulo estamos interessados em estimativas a priori para o conjunto X_F. Isto é, iremos supor que $X_F \neq \emptyset$ e, mesmo não assumindo regularidade sobre as funções F e G, mostraremos que os elementos de X_F têm regularidade $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Iniciaremos mostrando uma estimativa superior para c_F independente de Ω. De fato, escolha um ponto de máximo t_0 de F sobre a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{k-1}$ com $G(t_0) \geq 0$ e considere aplicações da forma $t_0 u \in E_k$ com $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u \geq 0$. Então

$$\begin{aligned}
c_F &\leq \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla t_0 u|^2 dx - \int_\Omega G(t_0 u) dx}{(\int_\Omega F(t_0 u) dx)^{2/2^*}} \\
&= \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - G(t_0) \int_\Omega |u|^2 dx}{M_F^{2/2^*} (\int_\Omega |u|^{2^*} dx)^{2/2^*}} \\
&\leq M_F^{-2/2^*} \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(\int_\Omega |u|^{2^*} dx)^{2/2^*}} - M_F^{-2/2^*} G(t_0) \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |u|^2 dx}{(\int_\Omega |u|^{2^*} dx)^{2/2^*}} \\
&\leq M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}.
\end{aligned}$$

Para uma função G qualquer e $n > 4$ encontramos a estimativa acima fazendo $\epsilon \to 0$ nas estimativas das páginas 39 e 40, Teorema 2.8.

Em vista disso, vamos enunciar dois teoremas considerando os casos $c_F < M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$ e $c_F = M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$, respectivamente. Também, mostraremos que, uma função minimizante $u \in E_k$ satisfaz o seguinte sistema não linear

$$-\Delta u \cdot u = c_F F(u) + G(u), \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.1}$$

em um adequado sentido, definido aqui como *ultra fraco*.

Teorema 3.1 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ e $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas homogêneas de graus 2^* e 2, respectivamente, $k \geq 1$. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Se*

$$c_F < M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2},$$

então $X_F \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e, além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq C$$

para todo minimizante $u \in X_F$, onde $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k) := L^\infty(\Omega) \times \cdots \times L^\infty(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \sum_{i=1}^{k} \|u^i\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Antes de começarmos a demonstração deste Teorema precisamos introduzir a definição de solução *ultra fraca*.

Definição 3.2 *Uma aplicação $u \in E_k$ é dita ser uma solução ultra fraca de* (3.1) *se*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u\varphi) dx = c_F \int_\Omega F(u)\varphi dx + \int_\Omega G(u)\varphi dx \tag{3.2}$$

para toda função $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ tal que $u\varphi \in E_k$. Denotaremos aqui $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^k \nabla u_i \cdot \nabla v_i$ para aplicações $u = (u^1, \cdots, u^k)$ e $v = (v^1, \cdots, v^k)$.

Observe que na definição acima, a classe de funções teste φ depende da solução u e contém o espaço $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.3 *Todo minimizante $u \in X_F$ é uma solução ultra fraca de* (3.1).

Demonstração. Seja $u \in X_F$ e $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ tal que $u\varphi \in E_k$. Considere a função $f : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \Phi\left(\frac{u + tu\varphi}{(\int_\Omega F(u + tu\varphi)dx)^{1/2^*}}\right).$$

Note que f está bem definida para $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente e atinge seu mínimo em $t = 0$. Assim, se f é diferenciável em $t = 0$, então $f'(0) = 0$. Por outro lado, pela homogeneidade de G, podemos reescrever f como

$$f(t) = \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u + tu\varphi}{(\int_\Omega F(u + tu\varphi)dx)^{1/2^*}}\right)\right|^2 dx - \int_\Omega G\left(\frac{u + tu\varphi}{(\int_\Omega F(u + tu\varphi)dx)^{1/2^*}}\right) dx$$

$$= \quad \frac{\int_\Omega |\nabla((1+t\varphi)u)|^2 dx - \int_\Omega (1+t\varphi)^2 G(u)dx}{(\int_\Omega (1+t\varphi)^{2^*} F(u)dx)^{2/2^*}}$$

de modo que f é diferenciável e, além disso,

$$0 = f'(0) = \frac{2[\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\varphi u)dx - \int_\Omega \varphi G(u)dx] - 2\Phi(u)\int_\Omega \varphi F(u)dx}{(\int_\Omega F(u)dx)^{4/2^*}}.$$

Como $u \in X_F$ temos que $\int_\Omega F(u)dx = 1$ e $\Phi(u) = c_F$, portanto

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\varphi u)dx - \int_\Omega \varphi G(u)dx - c_F \int_\Omega \varphi F(u)dx$$

Isto conclui a prova. □

Lema 3.4 *Para cada* $u \in X_F$*, temos* $|u| \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *e para qualquer função não negativa* $\eta \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_\Omega \nabla |u| \nabla \eta dx \le c_F \int_\Omega F(u)|u|^{-1}\eta dx + \int_\Omega G(u)|u|^{-1}\eta dx. \tag{3.3}$$

Demonstração. Por densidade é suficiente provar o lema para funções não negativas $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Para cada $u = (u^1, \cdots, u^k) \in X_F$ e $\epsilon > 0$, considere a função

$$v_\epsilon = \left(\sum_{i=1}^k (u^i)^2 + \epsilon\right)^{1/2}.$$

Pela regra da cadeia temos que $v_\epsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ e, além disso, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v_\epsilon \cdot \nabla \eta dx &= \int_\Omega v_\epsilon^{-1}(\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i) \cdot \nabla \eta dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^k \nabla u^i \cdot (\eta \nabla(u^i v_\epsilon^{-1}) + u^i v_\epsilon^{-1} \nabla \eta - \eta \nabla(u^i v_\epsilon^{-1}))dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^k \nabla u^i \cdot (\nabla(u^i v_\epsilon^{-1}\eta) - \eta \nabla(u^i v_\epsilon^{-1}))dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^k \nabla u^i \cdot \nabla(u^i v_\epsilon^{-1}\eta)dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^k \nabla u^i \cdot \eta \nabla(u^i v_\epsilon^{-1})dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_\Omega \nabla u^i \cdot \nabla(u^i v_\epsilon^{-1}\eta)dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^k \nabla u^i \cdot \eta(v_\epsilon^{-1}\nabla u^i - u^i v_\epsilon^{-3}\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i)dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_\Omega \nabla u^i \cdot \nabla(u^i v_\epsilon^{-1}\eta)dx - \int_\Omega v_\epsilon^{-3}\eta\left(v_\epsilon^2 \sum_{i=1}^k |\nabla u^i|^2 - |\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i|^2\right)dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na última integral, encontramos

$$|\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i|^2 = |(u^1, \cdots, u^k) \cdot (\nabla u^1, \cdots, \nabla u^k)|^2 \le |u|^2 \cdot |(\nabla u^1, \cdots, \nabla u^k)|^2 \le v_\epsilon^2 \sum_{i=1}^k |\nabla u^i|^2$$

logo,

$$\int_\Omega \nabla v_\epsilon \cdot \nabla \eta dx \leq \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega \nabla u^i \cdot \nabla(u^i v_\epsilon^{-1}\eta)dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u v_\epsilon^{-1}\eta)dx.$$

Veja que $\varphi = v_\epsilon^{-1}\eta$ pode ser tomada como função teste em (3.2). De fato, primeiro vamos mostrar que $\dfrac{u}{v_\epsilon} \in E_k$. Para isto, considere uma sequência $u_m^i \in C^\infty(\Omega)$, com $i = 1, \cdots, k$, de modo que

$$u_m^i \to u^i \quad \text{em} \quad L^2(\Omega)$$

e

$$Du_m^i \to Du^i \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Logo, para cada j fixo, temos que

$$\int_\Omega \frac{u_m^j}{(\sum_{i=1}^k {u_m^i}^2 + \epsilon)^{1/2}} D\varphi dx = -\int_\Omega \left(\frac{u_m^j \sum_{i=1}^k Du_m^i u_m^i}{(\sum_{i=1}^k {u_m^i}^2 + \epsilon)^{3/2}} + \frac{Du_m^j}{(\sum_{i=1}^k {u_m^i}^2 + \epsilon)^{1/2}} \right) \varphi dx.$$

Além disso, oberve que

$$\frac{u_m^j \sum_{i=1}^k Du_m^i u_m^i}{(\sum_{i=1}^k {u_m^i}^2 + \epsilon)^{3/2}} \leq \frac{|u_m^j| \sum_{i=1}^k |Du_m^i|}{(\sum_{i=1}^k {u_m^i}^2 + \epsilon)} \leq \frac{|u_m^j| \sum_{i=1}^k |Du_m^i|}{\epsilon},$$

$$\frac{u_m^j}{(\sum_{i=1}^k {u_m^i}^2 + \epsilon)^{1/2}} \leq \frac{|u_m^j|}{\epsilon^{1/2}},$$

e

$$\frac{Du_m^j}{(\sum_{i=1}^k {u_m^i}^2 + \epsilon)^{1/2}} \leq \frac{|Du_m^j|}{\epsilon^{1/2}}.$$

Portanto, aplicando o Teorema 1.1 e o Teorema da convergência dominada, segue que

$$\int_\Omega \frac{u^j}{(\sum_{i=1}^k {u^i}^2 + \epsilon)^{1/2}} D\varphi dx = -\int_\Omega \left(\frac{u^j \sum_{i=1}^k Du^i u^i}{(\sum_{i=1}^k {u^i}^2 + \epsilon)^{3/2}} + \frac{Du^j}{(\sum_{i=1}^k {u^i}^2 + \epsilon)^{1/2}} \right) \varphi dx.$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{u^j}{v_\epsilon} D\varphi dx = -\int_\Omega \left(\frac{u^j \sum_{i=1}^k Du^i u^i}{v_\epsilon^3} + \frac{Du^j}{v_\epsilon} \right) \varphi dx.$$

Assim $\dfrac{u^i}{v_\epsilon} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, para cada $i = 1, \cdots, k$. Então, a Proposição 1.11 fornece que $\dfrac{\eta u^i}{v_\epsilon} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é, $\dfrac{\eta u}{v_\epsilon} \in E_k$.

Pelo Lema 3.3, segue que

$$\int_\Omega \nabla v_\epsilon \cdot \nabla \eta dx \leq c_F \int_\Omega F(u) v_\epsilon^{-1} \eta dx + \int_\Omega G(u) v_\epsilon^{-1} \eta dx. \tag{3.4}$$

Agora, usando a homogeneidade e continuidade de F e G e a desigualdade de Sobolev, temos que $F(u)|u|^{-1}, G(u)|u|^{-1} \in L^1(\Omega)$ pois,

$$\int_\Omega \frac{F(u)}{|u|} dx \leq C \int_\Omega |u|^{2^*-1} dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty$$

e

$$\int_\Omega \frac{G(u)}{|u|}dx \leq C\int_\Omega |u|dx \leq C\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty$$

além disso,

$$F(u)v_\epsilon^{-1} \leq F(u)|u|^{-1}, \quad |G(u)|v_\epsilon^{-1} \leq |G(u)||u|^{-1}$$

já que $|v_\epsilon| > |u|$.

Por outro lado, temos que v_ϵ converge para $|u|$ em $W^{1,2}(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$, já que

$$\int_\Omega |v_\epsilon - |u||^2 dx = \int_\Omega [(|u|^2+\epsilon)^{1/2} - |u|]^2 dx = \int_\Omega 2|u|^2 + \epsilon - 2(|u|^2+\epsilon)^{1/2}|u|dx$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_\epsilon - \nabla |u||^2 dx &= \int_\Omega \left| v_\epsilon^{-1}\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i - |u|^{-1}\sum_{i=1}^k u^i\nabla u^i \right|^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{|u| - v_\epsilon}{v_\epsilon |u|}\right)^2 \left|\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega \frac{|u|^2 - 2|u|v_\epsilon + v_\epsilon^2}{v_\epsilon^2 |u|^2}\left|\sum_{i=1}^k u^i\nabla u^i\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Como

$$(|u|^2+\epsilon)^{1/2}|u| \leq C|u|^2 + C,$$

$$\frac{|\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i|^2}{v_\epsilon^2} \leq \frac{|\sum_{i=1}^k u^i\nabla u^i|^2}{|u|^2},$$

e

$$\frac{|\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i|^2}{v_\epsilon |u|} \leq \frac{|\sum_{i=1}^k u^i\nabla u^i|^2}{|u|^2}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, encontramos

$$\int_\Omega (|u|^2+\epsilon)^{1/2}|u|dx \to \int_\Omega |u|^2 dx,$$

$$\int_\Omega \frac{|\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i|^2}{v_\epsilon^2}dx \to \int_\Omega \frac{|\sum_{i=1}^k u^i\nabla u^i|^2}{|u|^2}dx,$$

e

$$\int_\Omega \frac{|\sum_{i=1}^k u^i \nabla u^i|^2}{v_\epsilon |u|}dx \to \int_\Omega \frac{|\sum_{i=1}^k u^i\nabla u^i|^2}{|u|^2}dx$$

quando $\epsilon \to 0$. Assim, definindo o funcional linear limitado $g : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$g(v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \eta dx,$$

temos que $g(v_\epsilon) \to g(|u|)$.

Usando o fato de que $g(v_\epsilon) \to g(|u|)$ no lado esquerdo de (3.4) e o Teorema da Convergência Dominada no lado direito segue que

$$\int_\Omega \nabla |u| \nabla \eta dx \leq c_F \int_\Omega F(u)|u|^{-1}\eta dx + \int_\Omega G(u)|u|^{-1}\eta dx.$$

Por último, escolha $(u_m) \subset C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ tal que u_m converge para u em $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Então, $|u_m| \to |u|$ em $W^{1,2}(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega ||\nabla u_m| - |\nabla u||^2 dx + \int_\Omega ||u_m| - |u||^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u_m - u|^2 dx.$$

Finalmente, usando que $|u_m| \in C_c(\Omega)$, temos que $|u| \in W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Observe que o Lema acima continua válido para um conjunto Ω' tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$, basta estender $|u|$ para $W_0^{1,2}(\Omega')$ e observar que na demonstração consideramos $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.5 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, e $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas homogêneas de graus 2^* e 2, respectivamente, $k \geq 1$. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Então, $X_F \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$.*

Demonstração. Seja $u \in X_F$. Por continuidade e homogeneidade de F e G, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|c_F F(t)|t|^{-1} + G(t)|t|^{-1}| \leq C(|t|^{2^*-1} + 1)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^k$. Como u satisfaz (3.3) e a desigualdade acima, basta aplicar o Teorema 1.25 com $\alpha = 2, a = 1, d = |u|^{2^*-2}, b = c = e = f = g = 0$ em um conjunto Ω' tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$ para obter a conclusão desejada. Note que d está em $L^{\frac{n}{2-\epsilon}}(\Omega)$ para algum $0 < \epsilon < 1$. De fato, para ϵ suficientemente pequeno temos que $\dfrac{2}{2-\epsilon} < \beta < \dfrac{2^*}{2}$ logo, $(2^* - 2)\dfrac{n}{2-\epsilon} < \beta 2^*$. Assim, pelo Teorema 1.22, $d \in L^{\frac{n}{2-\epsilon}}(\Omega)$. □

Já provamos que toda $u \in X_F$ está em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Mostraremos agora que é possível obter uma limitação uniforme para X_F fazendo uso do Teorema 1.25.

Prova do Teorema 3.1: Restante.

Demonstração. Suponha por absurdo que a conclusão seja falsa. Assim, existe uma sequência $(u_m) \subset X_F$ tal que

$$M_m = \|u_m\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)} \to \infty$$

quando $m \to \infty$. Pela definição de supremo essencial, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ fixado, existe $x_m \in \Omega$ tal que

$$\|u_m\|_{L^\infty(\Omega \cap B(x_m, M_m^{2/(2-n)}), \mathbb{R}^k)} \geq \frac{M_m}{2}. \tag{3.5}$$

Considere a k-aplicação

$$v_m(y) = \begin{cases} \dfrac{u_m(x_m + M_m^{2/(2-n)} y)}{M_m} & se \quad y \in \Omega_m = \{y \in \mathbb{R}^n : x_m + M_m^{2/(2-n)} y \in \Omega\}, \\ 0 & se \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega_m. \end{cases}$$

Observe que a sequência (v_m) satisfaz:

$$\|v_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)} = 1,$$

$$\|\nabla v_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)} = \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(v_m) dx = \int_\Omega F(u_m) dx = 1.$$

Daí, concluímos que

1) $v_m \rightharpoonup v \quad$ em $\quad W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

   Primeiro, observe que (v_m) é limitada em $W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ pois, usando desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v_m|^2 dx &= \int_{\Omega_m} |\nabla v_m|^2 dx + \int_{\Omega_m} |v_m|^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega_m} |\nabla v_m|^2 dx \\ &\leq C \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx. \end{aligned}$$

   Além disso, usando a homogeneidade e continuidade de F e G, a desigualdade de Holder e observando que $\int_\Omega F(u_m) dx = 1$, encontramos

$$\begin{aligned} \int_\Omega G(u_m) dx &\leq C \int_\Omega |u_m|^2 dx \\ &\leq C \left(\int_\Omega |u_m|^{2^*} dx \right)^{(n-2)/n} |\Omega|^{(2^*-2)/2^*} \\ &\leq C \left(\int_\Omega F(u_m) dx \right)^{(n-2)/n} \\ &= C \end{aligned}$$

   logo,

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - C \leq \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega G(u_m) dx = c_F$$

Isto juntamente com a primeira desigualdade fornece uma limitação para (v_m).

Como $W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ é reflexivo, temos que (v_m) possui uma subsequência fracamente convergente.

2) $v_m \to v \quad$ em $\quad L^q_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ para cada $1 \leq q < 2^*$.

Como (v_m) é limitada em $W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ basta aplicar Rellich-Kondrachov.

3) $v_m \to v \quad$ q.t.p. em $\quad \mathbb{R}^n$,

De fato, basta aplicar o Teorema 1.1 e observar que (v_m) é identicamente nula fora de Ω_m.

Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 dx < \infty, \tag{3.6}$$

e, por Brezis-Lieb, segue que

$$1 - \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(v_m - v)dx = \lim_{m\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^n} F(v_m)dx - \int_{\mathbb{R}^n} F(v_m - v)dx \right] = \int_{\mathbb{R}^n} F(v)dx,$$

mas

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(v_m - v)dx \geq 0,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(v)dx \leq 1. \tag{3.7}$$

O próximo passo será mostrar que a função v é não nula. O Lema 3.4 fornece

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla \eta dx \leq c_F \int_\Omega F(u_m)|u_m|^{-1}\eta dx + \int_\Omega G(u_m)|u_m|^{-1}\eta dx.$$

Podemos reescrever esta desigualdade em termos de v_m como

$$\int_{\Omega_m} \nabla|v_m| \cdot \nabla\eta dx \leq c_F \int_{\Omega_m} F(v_m)|v_m|^{-1}\eta dx + M_m^{2^*-2} \int_{\Omega_m} G(u)|v_m|^{-1}\eta dx.$$

Pela homogeneidade e continuidade de F e G, podemos encontrar uma constante C_0, independente de m, tal que

$$\int_{\Omega_m} \nabla|v_m| \cdot \nabla\eta dx \leq C_0 \int_{\Omega_m} |v_m|^{2^*-1}\eta dx + C_0 \int_{\Omega_m} |v_m|\eta dx,$$

Finalmente, usando (3.5) e o Teorema 1.25 com $\alpha = 2$, encontramos

$$\frac{1}{2} \leq \|v_m\|_{L^\infty(\Omega_m \cap B(0,\delta), \mathbb{R}^k)} \leq C\left(\int_{\Omega_m \cap B(0,2\delta)} |v_m|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

para algum C independente de m e m suficientemente grande. Então, fazendo $m \to \infty$, pelo item 2), temos que v é não nula.

Por outro lado, seja $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ uma função não negativa e considere $\varphi_m(x) = \varphi(M_m^{2/(n-2)}(x - x_m))$. Da definição de v_m, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla(v_m \varphi) dx = \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla(u_m \varphi_m) dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(v_m) \varphi dx = \int_{\Omega} F(u_m) \varphi_m dx,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(v_m) \varphi dx = M_m^{4/(n-2)} \int_{\Omega} G(u_m) \varphi_m dx.$$

Assim, pelo Lema 3.3,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla(v_m \varphi) dx = c_F \int_{\mathbb{R}^n} F(v_m) \varphi dx + M_m^{-4/(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} G(v_m) \varphi dx.$$

Como v_m é limitada e $v_m \to v$ q.t.p., pelo teorema da convergência dominada, o lado direito da igualdade acima converge para $c_F \int_{\mathbb{R}^n} F(v) \varphi dx$, já que $M_m^{-4/(n-2)} \to 0$ e $G(v_m)\varphi$ é integrável. Logo

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla(v_m \varphi) dx = c_F \int_{\mathbb{R}^n} F(v) \varphi dx$$

para toda função não negativa $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Considere uma função não negativa $\varphi \in C_c^1(B(0,2))$ tal que $\varphi \equiv 1$ sobre $B(0,1)$. Seja $\varphi_j(x) = \varphi(x/j)$. Note que φ_j converge para 1 pontualmente em $\mathbb{R}^n$. Escolhendo $\varphi = \varphi_j$ na igualdade acima e aplicando o limite sobre j, encontramos

$$\lim_{j \to \infty} \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla(v_m \varphi_j) dx = c_F \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(v) \varphi_j dx.$$

desde que o limite exista. Porém, do lado direito, usando o Teorema da Convergência Dominada e (3.7), temos que

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(v) \varphi_j dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(v) dx.$$

Por outro lado, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada e (3.6), segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{j \to \infty} \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla(v_m \varphi_j) dx &= \lim_{j \to \infty} \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 \varphi_j dx + \lim_{j \to \infty} \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla \varphi_j v_m dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + \lim_{j \to \infty} \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla \varphi_j v_m dx.
\end{aligned}$$

entretanto,

$$\lim_{j \to \infty} \lim_{m \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \cdot \nabla \varphi_j v_m dx \right| \leq \lim_{j \to \infty} \lim_{m \to \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_m|^2 \nabla \varphi_j|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \lim_{j\to\infty}\lim_{m\to\infty} C\left(\int_{B(0,2j)\setminus B(0,j)} |v_m|^2 dx\right)^{1/2}\\
&\leq C\lim_{j\to\infty}\left(\int_{B(0,2j)\setminus B(0,j)} |v|^2 dx\right)^{1/2}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx \leq c_F \int_{\mathbb{R}^n} F(v) dx.$$

Pelo Teorema 1.30 e pela hipótese, segue que

$$
\begin{aligned}
M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(v)dx\right)^{2/2^*} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx\\
&\leq c_F \int_{\mathbb{R}^n} F(v)dx\\
&< M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}\int_{\mathbb{R}^n} F(v)dx,
\end{aligned}
$$

Como v é não nula, dividindo tudo por $M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}\int_{\mathbb{R}^n} F(v)dx$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(v)dx > 1$$

Mas isto contradiz (3.7) e, portanto, vale a tese. □

Teorema 3.6 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ e $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções homogêneas contínuas de graus 2^* e 2, respectivamente, $k \geq 1$. Assuma F positiva em $\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$. Seja (u_m) uma sequência em X_F tal que $u_m \rightharpoonup u_0$ em E_k. Assuma*

$$c_F = M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}.$$

Então $(u_m) \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e, além disso:

i) se $u_0 \neq 0$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq C$$

para todo m e $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$;

ii) se $u_0 = 0$, então existe um único ponto $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que

$$u_m \to 0 \quad em \quad L^\infty(\Omega\setminus B(x_0,\delta), \mathbb{R}^k)$$

para todo $\delta > 0$. Além disso, existe uma sequência $(x_m) \subset \Omega$ convergindo para x_0 e k-aplicações v_m dadas por

$$v_m(y) = \begin{cases} \dfrac{u_m(x_m + M_m^{2/(2-n)}y)}{M_m} & se \quad y \in \Omega_m = \{y \in \mathbb{R}^n : x_m + M_m^{2/(2-n)}y \in \Omega\}, \\ 0 & se \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega_m \end{cases}$$

com $M_m = \|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)}$, convergindo para a k-aplicação $v_0 = t_0 w_0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, onde t_0 é um ponto de máximo de F em $\mathbb{S}^{k-1}$ e w_0 é uma função extremal para $k(n,2)$.

Demonstração. **Parte i)**

Como $u_m \rightharpoonup u_0$ em E_k, temos que (u_m) é limitada em E_k, então, por Rellich-Kondrachov e pelo Teorema 1.1, temos

$$u_m \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^k);$$

$$u_m \to u_0 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega, \mathbb{R}^k), \quad (1 \le q < 2^*);$$

e

$$u_m \to u_0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Seja $j \in \Gamma$ e $\epsilon > 0$. Escolha uma função corte $\varphi_\epsilon \in C_c^1(B(x_j, 2\epsilon))$ satisfazendo $0 \le \varphi_\epsilon \le 1$, $\varphi_\epsilon \equiv 1$ em $B(x_j, \epsilon)$ e $|\nabla\varphi_\epsilon| \le C/\epsilon$ para alguma constante $C > 0$ independente de ϵ.
Tomando $\varphi = \varphi_\epsilon$ em (3.2), temos

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla(u_m\varphi_\epsilon)dx = c_F \int_\Omega F(u_m)\varphi_\epsilon dx + \int_\Omega G(u_m)\varphi_\epsilon dx.$$

Fazendo $m \to \infty$ na igualdade acima e recordando que $\mu_m = |\nabla u_m|^2 dx$ e $\nu_m = F(u_m)dx$ são sequência limitadas em medida e, portanto, possuem subsequências fracamente convergentes, obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_\Omega u_m \nabla u_m \cdot \nabla\varphi_\epsilon dx\right) + \int_\Omega \varphi_\epsilon d\mu = c_F \int_\Omega \varphi_\epsilon d\nu + \int_\Omega G(u_0)\varphi_\epsilon dx$$

onde $\mu_m \rightharpoonup \mu$, $\nu_m \rightharpoonup \nu$ e $\int_\Omega G(u_m)\varphi_\epsilon dx \to \int_\Omega G(u_0)\varphi_\epsilon dx$. A última convergência foi obtida pela convergência em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$, o Teorema 1.1 e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Agora, passando o limite quando $\epsilon \to 0^+$, encontramos

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{m\to\infty}\left(\int_\Omega u_m \nabla u_m \cdot \nabla\varphi_\epsilon dx\right) + \mu(\{x_j\}) = c_F \nu(\{x_j\})$$

isto é,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{m\to\infty}\left(\int_\Omega u_m \nabla u_m \cdot \nabla\varphi_\epsilon dx\right) + \mu_j = c_F \nu_j$$

Por outro lado, usando Holder e o Teorema 1.38,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{m\to\infty}\left|\int_\Omega u_m\nabla u_m\cdot\nabla\varphi_\epsilon dx\right|$$

$$\leq C\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{m\to\infty}\left[\left(\int_\Omega|\nabla u_m|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{B(x_j,2\epsilon)\backslash B(x_j,\epsilon)}|\nabla\varphi_\epsilon|^n dx\right)^{1/n}\left(\int_{B(x_j,2\epsilon)\backslash B(x_j,\epsilon)}|u_m|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}\right]$$

$$\leq C\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{m\to\infty}\left(\int_{B(x_j,2\epsilon)\backslash B(x_j,\epsilon)}F(u_m)dx\right)^{1/2^*}$$

$$\leq C\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{B(x_j,2\epsilon)\backslash B(x_j,\epsilon)}F(u_0)dx+\sum_{i\in\Gamma}\nu\delta_{x_i}(B(x_j,2\epsilon)\backslash B(x_j,\epsilon))\right)^{1/2^*}=0$$

Portanto, $\mu_j=c_F\nu_j$. Desde que $c_F>0$, segue que $\mu_j>0$ se, e somente se, $\nu_j>0$. Além disso, pelo Teorema 1.38, temos

$$M_F^{2/2^*}k(n,2)^2\mu_j\geq\nu_j^{2/2^*}={c_F}^{-2/2^*}{\mu_j}^{2/2^*}$$

assim

$$\mu_j\geq M_F^{-n/2^*}k(n,2)^{-n}c_F^{-n/2^*}.$$

Claramente, isto implica que Γ é um conjunto finito, desde que μ é uma medida limitada. A hipótese $u_0\neq 0$ juntamente com $c_F>0$ garante que

$$\int_\Omega|\nabla u_0|dx-\int_\Omega G(u_0)dx>0$$

desde que

$$\frac{\int_\Omega|\nabla u_0|dx-\int_\Omega G(u_0)dx}{\int_\Omega F(u_0)dx}\geq c_F>0.$$

Usando a positividade acima, vamos mostrar que Γ é vazio. Caso contrário, para $j\in\Gamma$, temos

$$c_F=\lim_{m\to\infty}\left(\int_\Omega|\nabla u_m|^2dx-\int_\Omega G(u_m)\varphi_\epsilon dx\right)\geq\int_\Omega|\nabla u_0|^2dx+\sum_{i\in\Gamma}\mu_i-\int_\Omega G(u_0)dx$$

$$>\mu_j\geq M_F^{-n/2^*}k(n,2)^{-n}(c_F)^{-n/2^*},$$

então

$$c_F>M_F^{-2/2^*}k(n,2)^{-2},$$

contradizendo a hipótese do teorema. Portanto, Γ é vazio, logo

$$1=\lim_{m\to\infty}\int_\Omega F(u_m)dx=\int_\Omega F(u_0)dx$$

e, por Brezis-Lieb e pelas hipóteses sobre F, segue que u_m converge para u_0 em $L^{2^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Como podemos ver, a última conclusão conduz a limitação uniforme de (u_m). De fato, considere uma subsequência e suponha por absurdo que

$$M_m = \|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \to \infty$$

quando $m \to \infty$. Como na demonstração do Teorema 3.1, escolha $x_m \in \Omega$ satisfazendo (3.5) e defina a k-aplicação

$$v_m(y) = \begin{cases} \dfrac{u_m(x_m + M_m^{2/(2-n)}y)}{M_m} & se \quad y \in \Omega_m = \{y \in \mathbb{R}^n : x_m + M_m^{2/(2-n)}y \in \Omega\}, \\ 0 & se \quad y \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega_m. \end{cases}$$

Assim, para $R > 0$ fixo, o Lema de Fatou fornece

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |v|^{2^*} dx &\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{B(0,R)} |v_m|^{2^*} dx \\ &= \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega \cap B(x_m, RM_m^{2/(2-n)})} |u_m|^{2^*} dx \\ &\leq C \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega \cap B(x_m, M_m^{2/(2-n)})} |u_m|^{2^*} dx \\ &\leq C \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega \cap B(x_m, M_m^{2/(2-n)})} |u_m - u_0|^{2^*} dx + C \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega \cap B(x_m, M_m^{2/(2-n)})} |u_0|^{2^*} dx \\ &\leq C \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega \cap B(x_m, M_m^{2/(2-n)})} |u_m - u_0|^{2^*} dx \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega} |u_m - u_0|^{2^*} dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

então $v \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n$. Entretanto, vimos na demonstração do Teorema 3.1 que v é não nula. Finalmente, como $\|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq C$ e $u_m \to u_0$ q.t.p. em Ω temos que $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$. □

A demonstração do item (ii) do Teorema 3.6 será dividida em duas partes. Provaremos primeiro que (u_m) converge para 0 longe do ponto de concentração x_0.

Prova do Teorema 3.6 Parte ii): Parcial.

Demonstração. Primeiro, as condições $(u_m) \subset X_F$ e $u_0 = 0$ em Ω implicam que

$$\|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \to \infty$$

quando $m \to \infty$, a menos de subsequência. De fato, por Relllich-Kondrachov, existe uma subsequência tal que $u_m \to 0$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e, como

$$1 = \int_\Omega F(u_m) dx \leq M_F \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx = M_F \int_\Omega |u_m|^{2^*-2} |u_m|^2 dx \leq M_F \|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)}^{2^*-2} \|u_m\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^k)}^2.$$

Logo, se $\|u_m\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^k)} \to 0$ então $\|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \to \infty$. Como $c_F \leq M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$, pelo Teorema 3.1, temos que $c_F = M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$. Note também que

$$\left|\int_\Omega G(u_m)dx\right| \leq \int_\Omega |G(u_m)|dx \leq C\int_\Omega |u_m|^2dx \to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty$$

e, como

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2dx - \int_\Omega G(u_m)dx = c_F = M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$$

então

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_m|^2dx = M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$$

Assim, o Teorema da Concentração da Compacidade fornece

$$1 = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega F(u_m)dx = \sum_{i\in\Gamma}\nu_i$$

e

$$M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2} = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_m|^2dx \geq \sum_{i\in\Gamma}\mu_i$$

desde que

$$\int_\Omega F(u_0)dx = \int_\Omega |\nabla u_0|^2dx = 0.$$

Esta última desigualdade combinada com $M_F^{2/2^*} k(n,2)^2\mu_i \geq \nu_i^{2/2^*}$ para todo $i \in \Gamma$, fornece

$$\sum_{i\in\Gamma}\nu_i^{2/2^*} \leq 1.$$

Em particular, desde que $2^* > 2$, temos $0 \leq \nu_i \leq 1$ para todo $i \in \Gamma$, de modo que

$$1 = \sum_{i\in\Gamma}\nu_i \leq \sum_{i\in\Gamma}\nu_i^{2/2^*} \leq 1.$$

Então, existe $j \in \Gamma$ tal que $\nu_j = 1$ e $\nu_i = 0$ para todo $i \in \Gamma$, com $i \neq j$. Fazendo $x_0 = x_j \in \overline{\Omega}$, temos que $F(u_m)dx \rightharpoonup \delta_{x_0}$, então

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap B(x_0,\delta)} F(u_m)dx = 1$$

para todo $\delta > 0$. Em particular, $x_0 \in \overline{\Omega}$ é o único ponto de concentração de (u_m).

O argumento final consiste em provar que para cada $\tilde{x}_0 \in \overline{\Omega}$ e $\delta > 0$ tal que $x_0 \notin \overline{B(\tilde{x}_0, 2\delta)}$, temos

$$u \to 0 \quad \text{em} \quad L^\infty(\Omega\cap B(\tilde{x}_0,\delta),\mathbb{R}^k)$$

quando $m \to \infty$. Em ordem para estabelecer essa convergência, invocamos o Lema 3.4, o fato de que x_0 é o único ponto de concentração de (u_m) e que $x_0 \notin \overline{B(\tilde{x}_0, 2\delta)}$, então

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap B(\tilde{x}_0,2\delta)} |u_m|^{2^*}dx \leq C\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega\cap B(\tilde{x}_0,2\delta)} F(u_m)dx = 0$$

e, pelo Lema 3.4, existe uma constante $C_0 > 0$, independente de m, tal que

$$\int_\Omega \nabla |u_m| \nabla \eta dx \leq c_F \int_\Omega C_0 |u_m|^{2^*-1} \eta dx + \int_\Omega C_0 |u_m| \eta dx \tag{3.8}$$

para todo $\eta \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então, usando o Teorema 1.25 aplicado em (3.8), deduzimos

$$\|u_m\|_{L^\infty(\Omega \cap B(\tilde{x}_0,\delta),\mathbb{R}^k)} \leq \tilde{C}_0 \delta^{-n/2^*} \left(\int_{\Omega \cap B(\tilde{x}_0,2\delta)} |u_m|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} \to 0.$$

□

Por fim, mostraremos que (v_m) converge para $v_0 = t_0 w_0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, para algum ponto de máximo $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}$ e uma função extremal w_0 para $k(n,2)$.

Prova do Teorema 3.6: Parte ii): Restante.

Demonstração. Como provado anteriormente, a condição $u_m \rightharpoonup 0$ em E_k implica

$$c_F = M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$$

e, além disso, existe uma subsequência

$$M_m = \|u_m\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} \to \infty$$

quando $m \to \infty$. Para cada m, escolha $x_m \in \Omega$ satisfazendo

$$\|u_m\|_{L^\infty(\Omega \cap B(x_m, M_m^{2/(2-n)}),\mathbb{R}^k)} \geq \frac{M_m}{2}.$$

e considere a k-aplicação v_m como no Teorema 3.1. Claramente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \to M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2}$$

quando $m \to \infty$, e

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(v_m) dx = 1.$$

Argumentando exatamente como na demonstração do Teorema 3.1, concluímos que v_m converge fracamente para uma aplicação não nula $v_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ satisfazendo (3.6), (3.7) e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx \leq c_F \int_{\mathbb{R}^n} F(v_0) dx = M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} F(v_0) dx.$$

Então, a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(u) dx \right)^{2/2^*} \leq M_F^{2/2^*} k(n,2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

fornece

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(v_0)dx = 1.$$

Assim, por Brezis-Lieb e as hipóteses sobre F, deduzimos que v_m converge para v_0 em $L^{2^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Em adição, a aplicação v_0 satisfaz

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(v_0)dx\right)^{2/2^*} = M_F^{2/2^*} k(n,2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx.$$

De acordo com o Lema 1.30, temos $v_0 = t_0 w_0$ para algum ponto de máximo $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}$ e uma função extremal w_0 para $k(n,2)$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v_m - v_0)|^2 dx &= \lim_{m\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_m \nabla v_0 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx\right) \\
&= M_F^{-2/2^*} k(n,2)^{-2} - 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_0|^2 dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

[1] P. Amster. P.D. Napoli. M.C. Mariani. *Existence of solutions for elliptic systems with critical Sobolev exponent*. Electron. J. Differential Equations, 49: 1-13, 2002.

[2] E. Barbosa, M. Montenegro. *Nontrivial solutions for critical potential elliptic systems*. J. Differential Equations, 250: 3398-3417, 2011.

[3] T. Bartsch. Y. Guo. *Existence and nonexistence results for critical growth polyharmonic elliptic systems*. J. Differential Equations, 220: 531-543, 2006.

[4] H. Brezis. *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.

[5] H. Brezis. *Some variational problems with lack of compactness in Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Berkeley, 1983. Proc. Symp. Pure Math. 45, (F. Browder ed.), Amer. Math. Soc.: 165-201, 1986.

[6] H. Brezis. E. Lieb. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*. Proc. Amer.Math. Soc, 88: 486-490, 1983.

[7] H. Brezis and L. Nirenberg. *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*. Communications on Pure an Applied Mathematics, XXXVI: 437-477, 1983.

[8] J. Ceccon and M. Montenegro. *Uniform bounds of minimizers of non-smooth constrained functionals on maps spaces*. Advances in Calculus of Variations, Março de 2015. Acesso em 08 de dezembro, 2015. DOI: 10.1515/acv-2014-0019.

[9] L.C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society Providence, RI: 1998.

[10] M. Guedda. L. Véron. *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Nonlinear Anal, 13: 879-902, 1989.

[11] P.L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations*. The locally compact case. Part I, Ann. Inst. H. Poincare 1: 109-145, 1984.

[12] M. Montenegro. *On nontrivial solutions of critical polyharmonic elliptic systems*. J. Differential Equations, 247: 906- 916, 2009.

[13] D.C. Morais Filho. M.A. Souto. *Systems of p-Laplacian equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees*. Comm. Partial Differential Equations, 24: 1537-1553, 1999.

[14] M. A. Samuays. *O Problema de Brezis-Nirenberg*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná. Curitiba: 2011.

[15] J. Serrin. *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*. Acta Mathematica, 111(1): 247-302, 1964.

[16] C.A. Swanson. *The best Sobolev constant*. Appl. Anal, 47: 227-239, 1992.

[17] M. Willem. *Minimax Theorems*. Birkhauser, 1996.